

Laboratorium Elektrotechniki Teoretycznej

Teoria Obwodów 2

ELR021303L

Temat ćwiczenia:

**Badanie dwójników o
parametrach skupionych
R, L, C**

Instytut Podstaw Elektrotechniki i Elektrotechnologii -



Zakład Elektrotechniki Teoretycznej



1. Cel ćwiczenia.

Celem ćwiczenia jest zapoznanie się z własnościami rezystancyjnych, pojemnościowych i indukcyjnych dwójników elementarnych jako podstawowych elementów obwodów elektrycznych o parametrach skupionych w stanie ustalonym, przy wymuszeniu DC i AC.

2. Zakres ćwiczenia.

Ćwiczenie obejmuje badanie w stanie ustalonym rzeczywistych dwójników R, L, C przy wymuszeniu DC i AC:

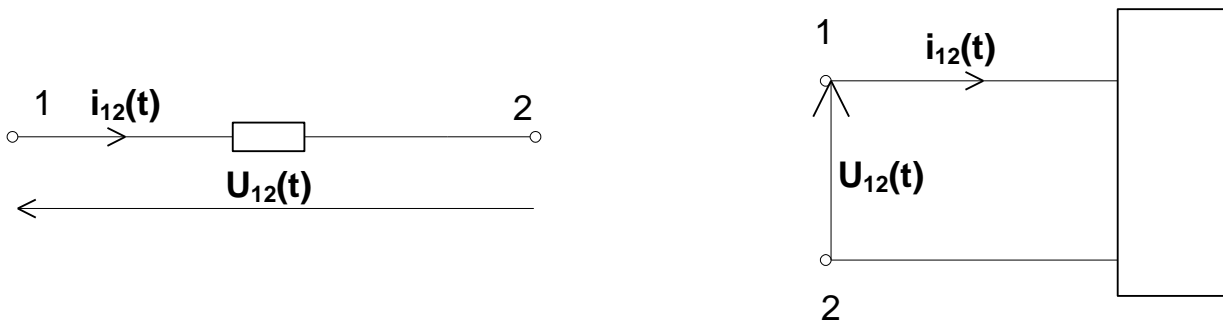
- Określenie parametrów dwójnika,
- Badanie liniowości dwójnika,
- Określenie przesunięcia fazowego dla sygnału AC,
- Określenie dobroci dwójnika L i C,
- obserwacja oscyloskopowa przebiegów ustalonych prądu i napięcia oraz przesunięć fazowych między tymi przebiegami na poszczególnych dwójnikach przy wymuszeniu AC
- interpretacja wyników pomiaru przy wymuszeniu AC na wykresach wskazowych

UWAGA !

W celu sprawnego przebiegu ćwiczenia konieczne jest posiadanie kalkulatora.

3. Wstęp teoretyczny.

Dwójnikiem nazywamy element z wyróżnionymi dwoma węzłami. Właściwości dwójnika określa się zależnością napięcia pomiędzy jego węzłami od przepływającego między nimi prądu. Na rys. 1 przedstawiono schematy graficzne dwójnika oraz przyjęty sposób oznaczania napięć i prądów.



Rys. 1 Schemat graficzny dwójnika.

Związek pomiędzy napięciem i prądem dwójnika $u=f_1(i)$ lub odwrotnie $i=f_2(u)$ nazywa się charakterystyką zewnętrzną dwójnika i może być określony analitycznie lub graficznie. Jeżeli charakterystyka zewnętrzna dwójnika przedstawiona analitycznie nie jest funkcją uwikłaną, to określa się immitancję dwójnika. Jest to stosunek napięcia do prądu (impedancja) lub prądu do napięcia (admitancja).

$$z(t) = \frac{u(t)}{i(t)} \quad \text{lub} \quad y(t) = \frac{i(t)}{u(t)} \quad (1)$$

Dwójnik, w którym zachodzi wytwarzanie energii elektrycznej (przetwarzanie innego rodzaju energii na energię elektryczną), nazywa się dwójnikiem źródłowym. Przykładem dwójnika źródłowego może być: bateria, akumulator, generator, fotoogniwo, itp. Dwójnik, którego zadaniem jest przetwarzanie energii elektrycznej na inny rodzaj energii, nazywa się dwójnikiem odbiorowym lub pasywnym (grzejnik, silnik, żarówka, wanna elektrolityczna, itp.).

3.1 Pasywne dwójniki R, L, C

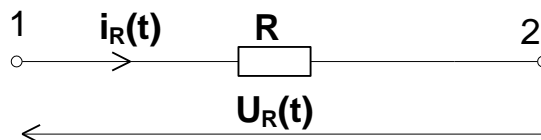
3.1.1 Idealny dwójnik rezystancyjny R (rezystor, opornik)

W przypadku dwójnika rezystancyjnego (rys. 2) zgodnie z prawem Ohma napięcie jest proporcjonalne do prądu (musimy jednak pamiętać, że zależność ta jest słuszna tylko dla stosunkowo niskich częstotliwości lub jeżeli w rozkładzie częstotliwościowym, harmoniczne wysokich rzędów są pomijalnie małe oraz dla niedużych wartości prądów lub dużych odległości pomiędzy przewodami. W przeciwnym przypadku efekt naskórkowy oraz efekt zbliżenia powodują wzrost rezystywności na skutek nierównomiernej gęstości prądu w przekroju przewodu).

$$u_R(t) = R \cdot i_R(t) \quad (2)$$

gdzie R – rezystancja

W idealnym dwójniku rezystancyjnym zachodzi rozpraszanie energii elektrycznej na ciepło Joule'a.



rys.2 Dwójnik rezystancyjny

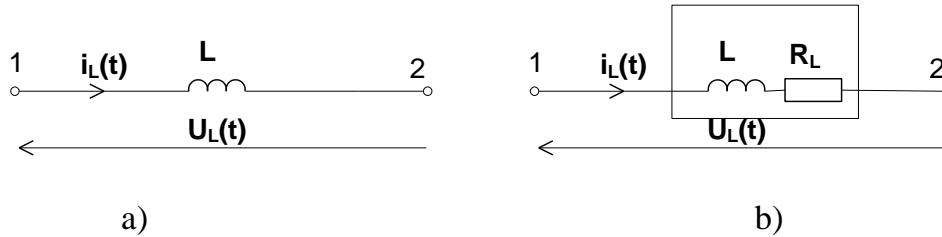
3.1.2 Idealny dwójnik indukcyjny L (cewka)

Napięcie na cewce (rys. 3) będące siłą elektromotoryczną indukcji (prawo Faraday'a), przy założeniu stałej wartości indukcji własnej L (dwójnik liniowy), wynosi

$$u_L(t) = \frac{d\Psi}{dt} = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt} \quad (3)$$

gdzie: L – indukcyjność własna cewki, Ψ – strumień własny indukcji skojarzony z cewką

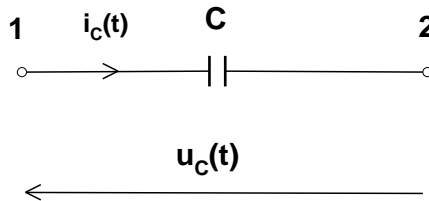
W idealnym dwójniku indukcyjnym następuje akumulowanie energii pola magnetycznego.



Rys. 3 Dwójnik indukcyjny, a) idealny, b) rzeczywisty

3.1.3 Idealny dwójnik pojemnościowy C (kondensator)

Prąd płynący przez idealny dwójnik pojemnościowy jest proporcjonalny do pochodnej napięcia na dwójniku (prąd przesunięcia dielektrycznego), rys. 4 . Współczynnik proporcjonalności nazywamy pojemnością C i wyrażamy w F (Faradach)



Rys. 4 dwójnik pojemnościowy

$$i_c(t) = C \frac{du_c(t)}{dt} \tag{4}$$

W idealnym dwójniku pojemnościowym następuje akumulowanie pola elektrycznego.

Moc chwilowa pobierana przez dwójnik określona jest jako iloczyn napięcia na dwójniku przez prąd płynący pomiędzy węzłami dwójnika (rys.1).

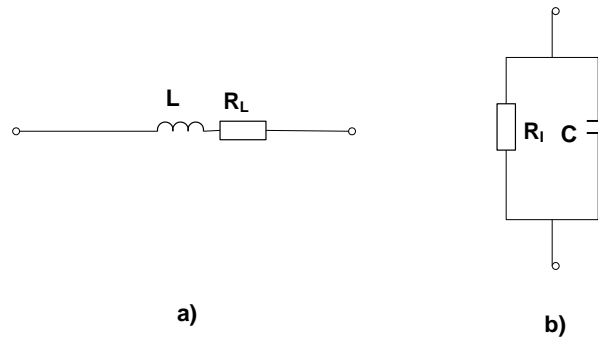
$$p(t) = u(t) \cdot i(t) \tag{5}$$

3.2 Rzeczywiste dwójniki indukcyjne i pojemnościowe

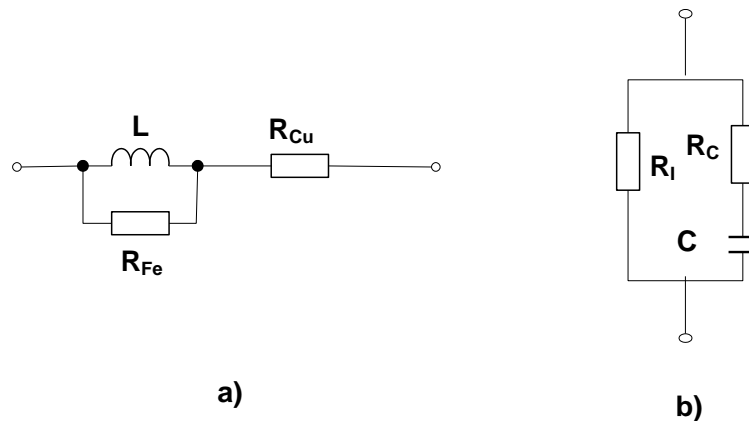
W rzeczywistych dwójnikach (cewki, kondensatory, rezystory rzeczywiste) zachodzi zarówno rozpraszanie energii (zamiana na ciepło Joule’a), jak i akumulowanie energii pola magnetycznego oraz elektrycznego. Zależnie od zakresu częstotliwości napięcia (prądu) zasilającego i wymaganej dokładności , dwójnik rzeczywisty przedstawia się układem zastępczym złożonym z idealnych dwójników R, L, C.

W zakresie niskich częstotliwości (do kilkuset Hz) cewkę rzeczywistą przedstawiamy jako szeregowe połączenie R i L (rys. 5a) a kondensator rzeczywisty jako równoległe połączenie R i C (rys. 5b). Schemat zastępczy cewki z rdzeniem ferromagnetycznym składa się z dwóch rezystorów (R_{Cu} - reprezentuje rezystancję uzwojenia, R_{Fe} - reprezentuje straty na przemagnesowanie rdzenia ferromagnetycznego) oraz indukcyjności L a układ zastępczy

kondensatora przy dużej częstotliwości również zawiera dwie rezystancje i pojemność, ale inaczej połączone tak jak przedstawiono na rys 6.



Rys. 5 Schematy zastępcze rzeczywistego dwójnika a) indukcyjnego, b) pojemnościowego przy małej częstotliwości



Rys.6 Schematy zastępcze rzeczywistego dwójnika a) indukcyjnego z rdzeniem ferromagnetycznym i b) pojemnościowego przy dużej częstotliwości

Rozpatrzmy zachowanie się dwójników R, L, C przy wymuszeniu stałoprądowym (DC) i przemiennym harmonicznym (AC).

3.2.1 Wymuszenie DC

W przypadku wymuszenia DC wielkości chwilowe prądu są niezależne od czasu i wówczas

$$u(t) = U \text{ i } i(t) = I$$

Dwójnik rezystancyjny R

Zgodnie ze wzorem (2) uzyskujemy klasyczną zależność $U = R \cdot I$ (prawo Ohma).

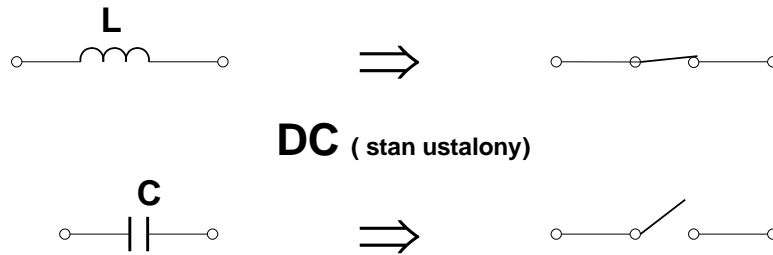
Dwójnik indukcyjny L

Zgodnie ze wzorem (3) , idealną cewkę przy wymuszeniu DC możemy traktować w obwodzie elektrycznym jako zwarcie jej końcówek. (rys.7).

Dwójnik pojemnościowy C

Zgodnie ze wzorem (4), idealny kondensator przy wymuszeniu DC możemy traktować w obwodzie elektrycznym jako przerwę pomiędzy jego końcówkami (rys.7).

W przypadku rzeczywistych dwójników L i C w obliczeniach musimy uwzględnić rezystancję szeregową cewki R_s i rezystancję upływu kondensatora R_i (rys. 5). Ze względu na wykorzystanie we współczesnych kondensatorach dobrych dielektryków, możemy często kondensator rzeczywisty traktować jako element idealny (przy małej częstotliwości).



Rys.7 Transformacja idealnego dwójnika L i C w stanie ustalonym przy wymuszeniu DC

3.2.2 Wymuszenie AC

W przypadku wymuszenia AC wykorzystujemy w obliczeniach obwodów elektrycznych metodę symboliczną. W metodzie symbolicznej rzeczywisty sygnał czasowy (harmoniczny)

$$x(t) = X_M \sin(\omega t + \psi)$$

gdzie X_M – wartość maksymalna (amplituda) sygnału, $\omega = 2\pi f$ - pulsacja sygnału [s^{-1}] i ψ – przesunięcie fazowe sygnału [rad], uzyskuje jednoznaczną reprezentację w postaci wartości zespolonej :

$$\underline{X} = X e^{j\psi} = X(\cos \psi + j \sin \psi), \text{ gdzie } X = \frac{X_M}{\sqrt{2}} = \text{jest wartością skuteczną rzeczywistego sygnału}$$

harmonicznego.

W wyniku tej operacji analiza obwodów elektrycznych sprowadza się do algebry na liczbach zespolonych.

Wielu autorów postać wykładniczą liczby zespolonej zapisuje następująco:

$$\underline{X} = X e^{j\psi} = X \angle \psi$$

oraz przesunięcie fazowe ψ wyraża w stopniach (deg).

Dwójnik rezystancyjny R

Zależność pomiędzy napięciem i prądem przyjmuje postać

$$\underline{U} = R \cdot \underline{I}, \text{ gdzie } \underline{U} = U \angle \psi_u \text{ a } R \cdot \underline{I} = R \cdot I \angle \psi_i$$

Z zależności tej widać, że w przypadku dwójnika rezystancyjnego napięcie jest w fazie z prądem ($\psi_u = \psi_i$) a wartość skuteczna napięcia jest proporcjonalna do wartości skutecznej prądu ($U = R \cdot I$).

Idealny dwójnik indukcyjny L

Zależność pomiędzy napięciem i prądem przyjmuje postać

$$\underline{U} = j\omega L \cdot \underline{I} = jX_L \underline{I} = X_L \left[\frac{\pi}{2} \cdot I \right] \psi_i = X_L \cdot I \left[\psi_i + \frac{\pi}{2} \right]$$

Z zależności tej widać, że w przypadku dwójnika indukcyjnego napięcie wyprzedza prąd o kąt $\pi/2$ (90°), a wartość skuteczna napięcia jest proporcjonalna do wartości skutecznej prądu ($U = X_L \cdot I$). Współczynnik proporcjonalności X_L nazywamy reaktancją. W układach liniowych reaktancja nie jest funkcją wielkości sygnału (U i I), zależy natomiast od częstotliwości sygnału ($X_L = \omega L = 2\pi f$).

Idealny dwójnik pojemnościowy C

Zależność pomiędzy napięciem i prądem przyjmuje postać

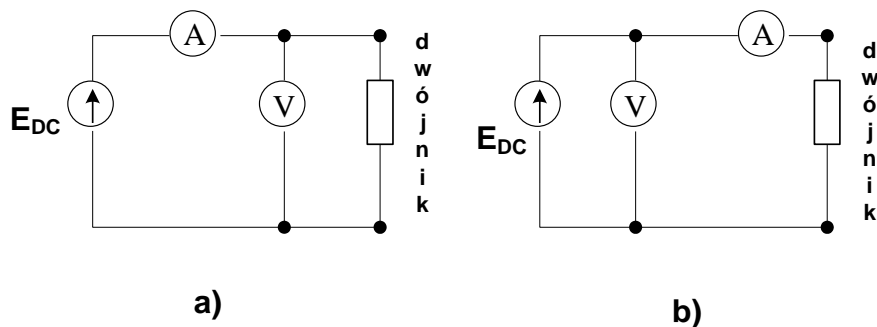
$$\underline{I} = j\omega C \cdot \underline{U} \Rightarrow \underline{U} = -j \frac{1}{\omega C} \cdot \underline{I} = -jX_C \underline{I} = X_C \left[-\frac{\pi}{2} \cdot I \right] \psi_i = X_C \cdot I \left[\psi_i - \frac{\pi}{2} \right]$$

Z zależności tej widać, że w przypadku dwójnika indukcyjnego napięcie opóźnia się względem prądu o kąt $\pi/2$ (90°), a wartość skuteczna napięcia jest proporcjonalna do wartości skutecznej prądu ($U = X_C \cdot I$). W układach liniowych reaktancja nie jest funkcją wielkości sygnału (U i I), zależy natomiast od częstotliwości sygnału ($X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C}$).

W przypadku rzeczywistych dwójników indukcyjnych i pojemnościowych musimy je zastąpić odpowiednim schematem zastępczym (rys.5 lub rys 6).

4. Eksperyment

4.1 Wymuszenie DC



Rys.9 Układ pomiarowy do badania dwójnika przy wymuszeniu DC, a) w układzie z dokładnym pomiarem napięcia, b) w układzie z dokładnym pomiarem prądu.

4.1.1 Dwójnik rezystancyjny

- Wykorzystując omomierz zmierzyć rezystancję wewnętrzną amperomierza i woltomierza
- zestawić układ pomiarowy zgodnie z rys.9 wykorzystując jako odbiornik dwójnik rezystancyjny R
- dla wartości napięcia zasilania (podanych przez prowadzącego) zanotować w tab. 1 wskazania amperomierza i woltomierza dla układu z dokładnym pomiarem prądu i układu z dokładnym pomiarem napięcia
- określić wartość oporu dwójnika rezystancyjnego

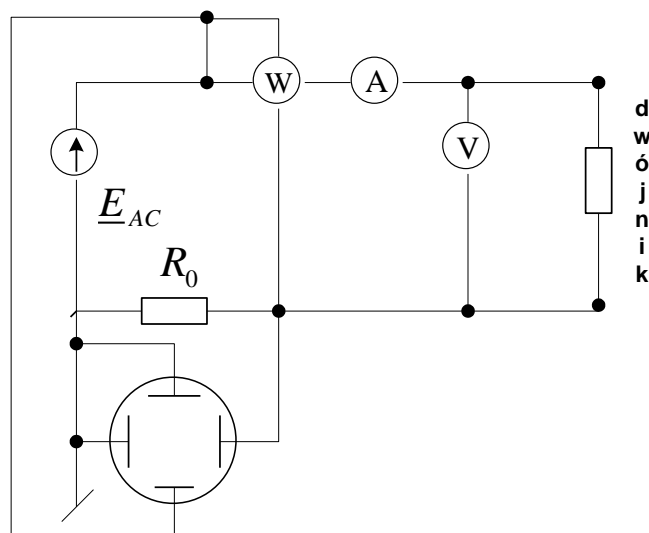
4.1.2 Dwójnik indukcyjny

- zestawić układ pomiarowy zgodnie z rys.9 wykorzystując jako odbiornik rzeczywistą cewkę
- dla wartości napięcia zasilania (podanych przez prowadzącego) zanotować w tab. 1 wskazania amperomierza i woltomierza dla układu z dokładnym pomiarem prądu i układu z dokładnym pomiarem napięcia
- określić wartość rezystancji szeregowej rzeczywistej cewki

4.1.3 Dwójnik pojemnościowy

- zestawić układ pomiarowy zgodnie z rys.9 wykorzystując jako odbiornik dwójnik pojemnościowy
- dla wartości napięcia zasilania (podanych przez prowadzącego) zanotować w tab.1 wskazania amperomierza i woltomierza dla układu z dokładnym pomiarem prądu i układu z dokładnym pomiarem napięcia (uwaga, przed każdym pomiarem sprawdzić czy napięcie początkowe kondensatora jest zerowe !)

4.2 Zasilanie AC



Rys.10 Układ do badania dwójnika przy wymuszeniu AC

UWAGA: w przypadku dwójnika rezystancyjnego i indukcyjnego jako wymuszenie AC wykorzystywać autotransformator !

4.2.1 dwójnik rezystancyjny

- Wykorzystując omomierz zmierzyć rezystancję wewnętrzną amperomierza i woltomierza
- zestawić układ pomiarowy zgodnie z rys.10 wykorzystując jako odbiornik dwójnik rezystancyjny
- dla wartości napięcia zasilania (podanych przez prowadzącego) zanotować w tab. 2 wskazania przyrządów
- wykorzystując oscyloskop zdjąć przebiegi prądu i napięcia
- określić wartość oporu dwójnika rezystancyjnego
- określić przesunięcie fazowe $\varphi = \psi_U - \psi_I$

4.2.2 dwójnik indukcyjny

- zestawić układ pomiarowy zgodnie z rys.10 wykorzystując jako odbiornik cewkę indukcyjną
- dla wartości napięcia zasilania (podanych przez prowadzącego) zanotować w tab. 2 wskazania przyrządów,
- wykorzystując oscyloskop zdjąć przebiegi prądu i napięcia
- określić przesunięcie fazowe $\varphi = \psi_U - \psi_I$
- obliczyć rezystancję szeregową i reaktancję rzeczywistego dwójnika indukcyjnego

UWAGA: w przypadku dwójnika pojemnościowego jako wymuszenie AC wykorzystać generator mocy pracujący przy częstotliwości 50 Hz.

4.2.3 dwójnik pojemnościowy

- zestawić układ pomiarowy zgodnie z rys.10 wykorzystując jako odbiornik kondensator
- dla wartości napięcia zasilania (podanych przez prowadzącego) zanotować w tab. 2 wskazania przyrządów
- wykorzystując oscyloskop zdjąć przebieg prądu i napięcia
- określić przesunięcie fazowe $\varphi = \psi_U - \psi_I$
- obliczyć rezystancję upływu i reaktancję rzeczywistego dwójnika pojemnościowego

4.3 Tabele pomiarowe

Tab.1 Tabela pomiarowa do badania dwójnika przy wymuszeniu DC

dwójnik	U_z	Dokładny pomiar U		Dokładny pomiar I	
		U	I	U	I
	V	V	A	V	A
R					

L						
C						

Tab. 2 Tabela pomiarowa do badania dwójnika przy wymuszeniu AC

dwójnik	U_z	U	I	P	$\cos\varphi$	φ	$\Psi_U - \Psi_I$
	V	V	A	W			
R							
L							
C							

Uwaga: w sprawozdaniu należy stworzyć tabelę, w której zostaną umieszczone obliczone parametry dwójników rzeczywistych R, L i C przy wymuszeniu DC i AC.

- narysować wykresy wskazowe zbadanych dwójników przy wymuszeniu AC,
- narysować wykresy przebiegów chwilowych $u(t)$ i $i(t)$ w funkcji czasu, kąta wyrażonego w radianach lub degach

6. Pytania sprawdzające.

1. Określić podstawowe związki pomiędzy napięciem i prądem dla idealnych dwójników R, L, C ?
2. Napisać podstawowe związki pomiędzy napięciem i prądem dla idealnych dwójników R, L, C przy wymuszeniu DC.
3. Napisać podstawowe związki pomiędzy napięciem i prądem dla idealnych dwójników R, L, C przy wymuszeniu AC
4. Narysować wykres wskazowy napięcia i prądu dla idealnego dwójnika L i C przy wymuszeniu AC.
5. Narysować wykres wskazowy napięcia i prądu dla rzeczywistego dwójnika L i C (rys.5) przy wymuszeniu AC.
6. Jak określić przesunięcie fazowe φ z diagramu oscyloskopowego przebiegów chwilowych napięcia i prądu?
7. Narysować układ do pomiaru impedancji dwójnika metodą techniczną.
8. Jak określić przesunięcie fazowe φ z pomiaru impedancji dwójnika metodą techniczną?

7. Literatura

1. Bolkowski ST., *Teoria obwodów elektrycznych*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 1995,

2. Cichowska Z., Pasko M., Wykłady z Elektrotechniki Teoretycznej , Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 1997

Uwagi dotyczące instrukcji proszę zostawić przy stanowisku pomiarowym.

Uwagi dotyczące ćwiczenia:

Laboratorium Podstaw Elektrotechniki

Temat ćwiczenia:

Filtry z elementami pasywnymi

Instytut Podstaw Elektrotechniki i Elektrotechnologii -

Zakład Elektrotechniki Teoretycznej



1. Cel ćwiczenia.

Wyznaczyć charakterystykę amplitudową i fazową filtrów: dolno- i górno-przepustowego oraz filtru selektywnego.

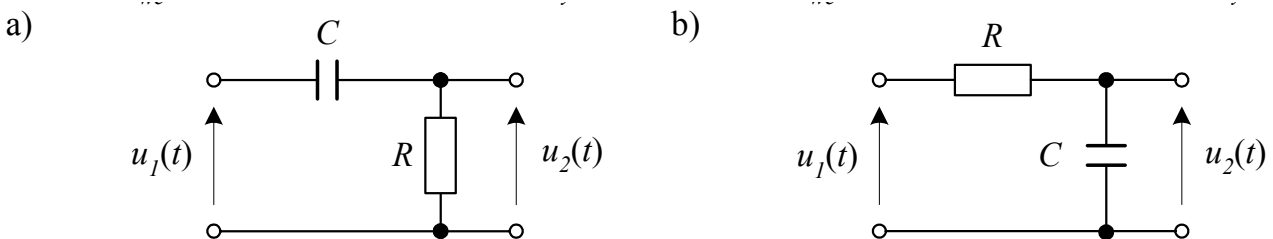
Wyposażenie stanowiska pomiarowego:

Generator sygnałów akustycznych,
Oscyloskop. Fazomierz,
Woltomierz AC,
Kondensatory, rezystory.

2. Wprowadzenie.

Obwody filtrujące RC mają w teorii układów duże znaczenie. Chociaż przedstawione filtry należą do układów najprostszych, to poznanie ich własności jest ważne, gdyż zasada działania pozostaje taka sama, niezależnie od stopnia złożoności układu.

Podstawowe schematy filtrów - górno- i dolno-przepustowego przedstawiono na Rys. 2.1.



Rys. 2.1 Schematy filtrów: a) górno-przepustowego, b) dolno-przepustowego.

2.1. Filtr górno-przepustowy.

Filtr górno-przepustowy jest układem, który przepuszcza sygnały o wysokich częstotliwościach, a tłumi o częstotliwościach niskich, wprowadzając jednocześnie przesunięcia fazowe.

Aby dokonać analizy charakterystyki częstotliwościowej wzmocnienia i przesunięcia fazowego filtru, należy obliczyć tzw. transmitancję $\underline{H}(j\omega)$, którą określa się jako stosunek wartości zespolonej sinusoidalnego sygnału wyjściowego do wartości zespolonej sinusoidalnego sygnału wejściowego filtru.

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_2(j\omega)}{\underline{U}_1(j\omega)} = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} \quad (2.1)$$

przy czym:

$$A(\omega) = |\underline{H}(j\omega)| = \left| \frac{\underline{U}_2(j\omega)}{\underline{U}_1(j\omega)} \right| - \text{funkcja określająca tzw. charakterystykę amplitudową}$$

filtru, tj. stosunek wartości skutecznych sygnałów w funkcji pulsacji.

$$\varphi(\omega) = \arg \underline{H}(j\omega) = \arg \underline{U}_2(j\omega) - \arg \underline{U}_1(j\omega) - \text{funkcja określająca tzw. charakterystykę fazową filtru, tj. przesunięcie fazowe sygnałów w funkcji pulsacji.}$$

Dla filtru górnoprzepustowego transmitancja ma postać:

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} = \frac{|\omega|RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} e^{j\left(\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(\omega) - \operatorname{arc tg}(\omega RC)\right)} \quad (2.2)$$

A zatem

$$A(\omega) = \frac{|\omega|RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}, \quad \varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(\omega) - \operatorname{arc tg}(\omega RC) \quad (2.3)$$

lub też

$$A(\omega) = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}, \quad \varphi(\omega) = \operatorname{arc tg}\left(\frac{1}{\omega RC}\right) \quad (2.4)$$

Własności filtru definiuje się m.in. przez wprowadzenie pojęcia tzw. częstotliwości odcięcia (lub częstotliwości granicznej), jako takiej częstotliwości, przy której zachodzi równość:

$$A(\omega_{od}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (2.5)$$

Po przeliczeniu otrzymamy:

$$\omega_{od} = \frac{1}{RC} \Rightarrow f_{od} = \frac{1}{2\pi RC} \quad (2.6)$$

2.2. Filtr dolno-przepustowy.

Filtr dolno-przepustowy jest układem, który przepuszcza sygnały o częstotliwościach niskich, a tłumi sygnały o częstotliwościach wysokich.

Przeprowadzenie analizy tego układu, podobnie jak filtru górnoprzepustowego prowadzi do następujących zależności

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} e^{-j \operatorname{arc tg}(\omega RC)} \quad (2.7)$$

Stąd

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}, \quad \varphi(\omega) = -\operatorname{arc tg}(\omega RC) \quad (2.8)$$

Podobnie jak poprzednio, pulsacja i częstotliwość odcięcia są równe:

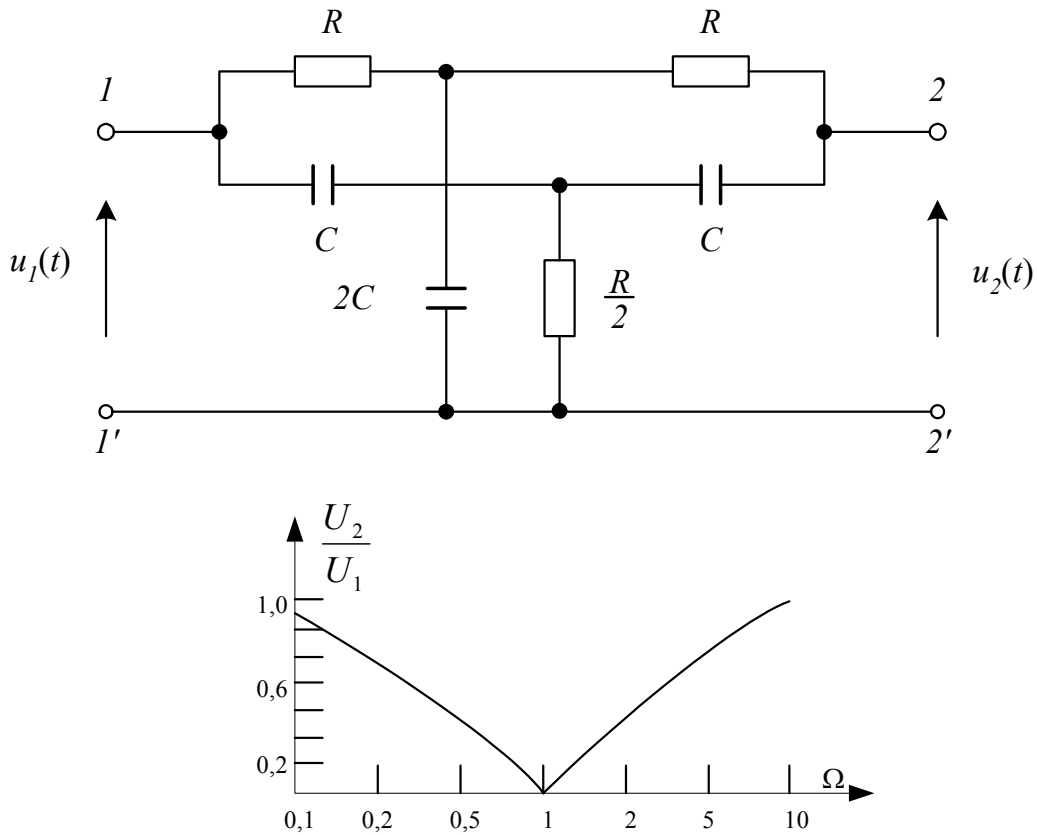
$$\omega_{od} = \frac{1}{RC} \Rightarrow f_{od} = \frac{1}{2\pi RC} \quad (2.9)$$

2.3. Praktyczne wykorzystanie filtrów.

Opisane filtry można łączyć ze sobą w celu uzyskania żądanych własności. Poniżej pokazano jeden z popularnych przykładów takich połączeń.

Filtr - podwójne T

Jest to w zasadzie połączenie równoległe dolno- i górno-przepustowego filtra, który przy właściwym doborze elementów daje w rezultacie filtr selektywny. Należy zwrócić uwagę na wartości elementów.



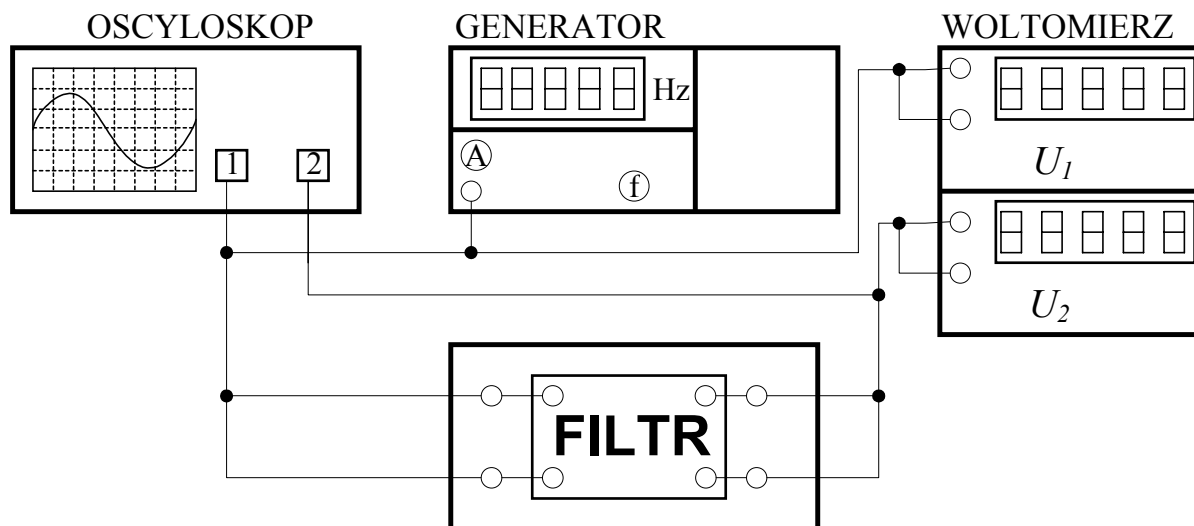
Rys. 2.2 Schemat połączeń i znormalizowana charakterystyka częstotliwościowa filtra podwójne T ($\Omega = \omega RC$).

Jak widać filtr taki tłumi wybraną częstotliwość. Dla podanych elementów jej wartość można wyznaczyć ze wzoru

$$f_0 = \frac{1}{2\pi RC} \quad (2.10)$$

3. Program ćwiczenia.

3.1. Schemat układu połączeń.



Rys. 3.1 Schemat połączeń układu pomiarowego

3.2. Filtr dolnoprzepustowy RC.

1. Do tabeli IA wpisz obliczoną częstotliwość odcięcia, dla wybranych wartości elementów.
2. Sprawdź czy połączenia przyrządów są zgodne z Rys. 3.1.
3. Dla każdej częstotliwości z tabeli IB zmierz i zapisz napięcie wyjściowe U_2 , utrzymuj stałą wartość napięcia wejściowego U_1 np. 1V.
4. Dla wybranych częstotliwości zmierz i zapisz różnicę faz φ między napięciem wejściowym a wyjściowym wykorzystując oscyloskop lub fazomierz.
5. Znajdź częstotliwość generatora przy, której napięcia wyjściowe U_2 jest równe $0.707 U_1$ (zmiana o 3dB). Zapisz tę wartość w tabeli IA.
6. Uzupełnij tabelę o wyliczone wartości transmitancji. Narysuj wykres charakterystyki amplitudowej $A(f)$ oraz fazowej $\varphi(f)$ w funkcji częstotliwości, stosując dowolny program komputerowy lub na dołączonej siatce logarytmicznej.
7. Na otrzymanym wykresie zaznacz wartości $A(f)$ oraz φ dla kilku wybranych częstotliwości, wyznaczonych z odpowiednich wzorów teoretycznych.

3.3. Filtr górno-przepustowy RC.

1. Do tabeli IIA wpisz obliczoną częstotliwość odcięcia dla wybranych wartości elementów.
2. Sprawdź czy połączenia przyrządów są zgodne z Rys. 3.1.
3. Dla każdej częstotliwości z tabeli IIB zmierz i zapisz napięcie wyjściowe U_2 , utrzymuj stałą wartość napięcia wejściowego U_1 np. 1V.
4. Dla wybranych częstotliwości zmierz i zapisz różnicę faz φ między napięciem wejściowym a wyjściowym wykorzystując oscyloskop lub fazomierz.
5. Znajdź częstotliwość generatora, przy której napięcie wyjściowe U_2 jest równe $0.707 U_1$ (zmiana o 3dB). Zapisz tę wartość w tabeli IA.
6. Uzupełnij tabelę o wyliczone wartości transmitancji. Narysuj wykres charakterystyki amplitudowej $A(f)$ oraz fazowej $\varphi(f)$ w funkcji częstotliwości, stosując dowolny program komputerowy lub na dołączonej siatce logarytmicznej.
7. Na otrzymanym wykresie zaznacz wartości $A(f)$ oraz $\varphi(f)$ dla kilku wybranych częstotliwości wyznaczonych z odpowiednich wzorów teoretycznych.

3.4. Filtr selektywny RC.

1. Do tabeli IIIA wpisz obliczoną częstotliwość blokowania, dla wybranych wartości elementów.
2. Sprawdź czy połączenia przyrządów są zgodne z Rys. 3.1.
3. Dla każdej częstotliwości z tabeli IIIB zmierz i zapisz napięcie wyjściowe U_2 utrzymuj stałą wartość napięcia wejściowego U_1 np. 1V.
4. Uzupełnij tabelę IIIA o wyliczone wartości transmitancji. Te same wartości zaznacz na dołączonej siatce logarytmicznej (lub w dowolnym programie) i narysuj wykres $A(f)$.
5. Znajdź częstotliwości generatora przy, której napięcie wyjściowe U_2 jest równe $0.707 U_1$ (zmiana o 3dB). Zapisz tę wartość w tabeli III A.
6. Zmieniając częstotliwość generatora zmierz i zapisz częstotliwość blokowania obwodu.

Dodatkowo zmierz U_2 dla częstotliwości mniejszej i większej o 10% od zmierzonej f_0 . Wpisz te wartości do tabeli IIIB.

4. TABELLE

4.1. Filtr dolnoprzepustowy

Tabela IA

Wartości elementów		Częstotliwość odcięcia	
R	C	Wyliczona	Zmierzona

Tabela IB Napięcie wejściowe $U_1 =$

$f[Hz]$	50	100	200	300	400	500	600	700	800	900	10^3	$2 \cdot 10^3$	$5 \cdot 10^3$	10^4
U_2														
$\frac{U_2}{U_1}$														
φ														

4.2. Filtr górnoprzepustowy

Tabela IIA

Wartości elementów		Częstotliwość odcięcia	
R	C	Wyliczona	Zmierzona

Tabela IIB Napięcia wejściowe $U_1 =$

$f[Hz]$	50	100	200	300	400	500	600	700	800	900	10^3	$2 \cdot 10^3$	$5 \cdot 10^3$	10^4
U_2														
$\frac{U_2}{U_1}$														
φ														

4.3. Filtr selektywny RC

Tabela IIIA

Wartości elementów		Częstotliwość blokowa	
R	C	Wyliczona	Zmierzona

Tabela IIIB Napięcie wejściowe $U_1 =$

f [Hz]	50	100	200	300	400	500	600	700	800	900	10^3	$2 \cdot 10^3$	$5 \cdot 10^3$	f_0	f_0 -10 %	f_0 +10 %
U_2																
$\frac{U_2}{U_1}$																
φ																

5. Opracowanie sprawozdania

1. Wypełniona tabelka wg wzoru,
2. Cele ćwiczenia, schemat układu pomiarowego,
3. Wypełnione tabele (wyliczoną częstotliwość odcięcia podać dla znamionowej wartości elementów oraz dla wartości skrajnych podanej tolerancji),
4. Wyprowadzić wzór na częstotliwości odcięcia dla jednego z filtrów RC,
5. Narysować odpowiednie wykresy (zaznacz też kilka wartości wyliczonych ze wzoru teoretycznego).
6. W pewnym układzie na właściwy sygnał nakłada się 'przydźwięk sieci' (50Hz). Trzeba zbudować filtr górno-przepustowy o częstotliwości odcięcia 80 Hz, aby wyeliminować paskudę.

Mamy kondensator o wartości x [nF]. Jaki trzeba mieć rezystor?. Dobierz jego wartość zgodnie ze standardowymi wartościami szeregu 5%.

Wartość x poda prowadzący !!

7. Uwagi lub konstruktywne wnioski.

6. Pytania kontrolne

1. Co to jest częstotliwość odcięcia.
2. Podaj schemat filtra RC dolno- i górno-przepustowego.
3. Jak zmienia się przesunięcie fazowe ze zmianą częstotliwości, w podanych układach RC, spróbuj naszkicować wykres.

Laboratorium Elektrotechniki Teoretycznej
Teoria Obwodów 2
ELR021303L

Temat ćwiczenia:

**Badanie szeregowego
układu RLC przy wymuszeniu
sinusoidalnym**

Instytut Podstaw Elektrotechniki i Elektrotechnologii -

Zakład Elektrotechniki Teoretycznej



1. Cel i zakres ćwiczenia.

Poznanie zjawisk występujących w obwodzie złożonym z szeregowo połączonych elementów RLC zasilanych ze źródła napięcia sinusoidalnie zmiennego. Wyznaczenie spadków napięć na poszczególnych elementach obwodu dla różnych częstotliwości sygnału zasilającego. Sprawdzenie zachowania się szeregowego obwodu RLC w czasie zasilania go napięciem o częstotliwości rezonansowej

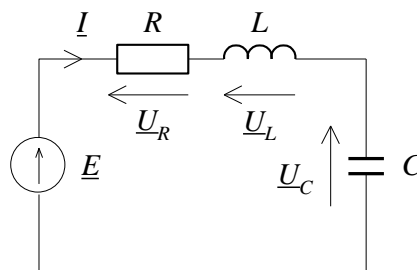
2. Wstęp teoretyczny.

Na rys.1 przedstawiono schemat obwodu złożonego z szeregowo połączonych elementów RLC. Obwód jest zasilany ze źródła sinusoidalnej SEM.

$$e(t) = \sqrt{2}E \sin(\omega t + \psi) \quad (1)$$

którą przedstawia się w postaci symbolicznej

$$\underline{E} = E e^{j\psi} \quad (2)$$



Rys.1 Schemat szeregowego obwodu rezonansowego.

Prąd płynący w tym obwodzie w wyniku działania SEM:

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{E}}{R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C}} = \frac{\underline{E} e^{-j\varphi}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad (3)$$

gdzie:

R - jest to rezystancja obwodu, ωL - reaktancja indukcyjna, $\frac{1}{\omega C}$ - reaktancja pojemnościowa.

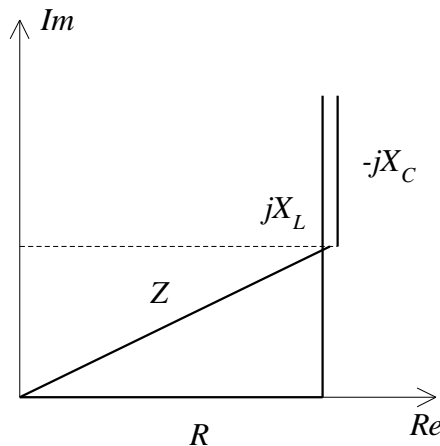
Moduł impedancji szeregowego obwodu RLC jest opisany zależnością:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad (4)$$

Argument impedancji:

$$\varphi = \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \quad (5)$$

Graficznie impedancję szeregowego obwodu RLC można pokazać w postaci trójkąta (rys. 2.)



Rys.2 Wykres impedancji szeregowego obwodu RLC.

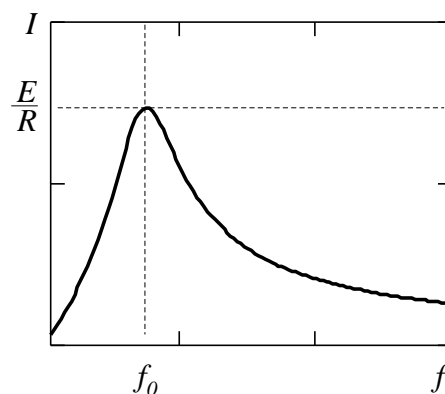
Przebieg czasowy prądu płynącego w obwodzie:

$$i(t) = \sqrt{2}I \sin(\omega t + \psi - \varphi) \quad (6)$$

przy czym I jest to wartość skuteczna prądu i wynosi:

$$I = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad (7)$$

Zależność (7) nazywa się równaniem krzywej rezonansowej szeregowego obwodu RLC, natomiast zależność (5) równaniem charakterystyki fazowej. Na rys.3 przedstawiono wykres zmian modułu natężenia prądu I w funkcji częstotliwości napięcia zasilającego.



Rys.3 Charakterystyka rezonansowa - $I = I(f)$

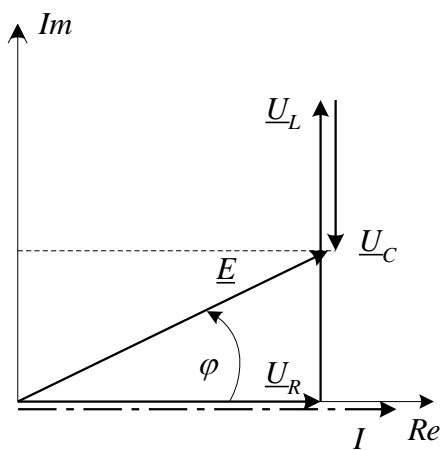
Płynący w obwodzie prąd wywołuje na poszczególnych elementach spadki napięć

$$\underline{U}_R = R\underline{I} = E \frac{R}{Z} e^{j(\psi-\varphi)} \quad (8)$$

$$\underline{U}_L = j\omega L\underline{I} = \frac{\omega L E}{Z} e^{j(\psi-\varphi+\frac{\pi}{2})} \quad (9)$$

$$\underline{U}_C = \frac{1}{j\omega C} \underline{I} = \frac{E}{\omega C Z} e^{j(\psi-\varphi-\frac{\pi}{2})} \quad (10)$$

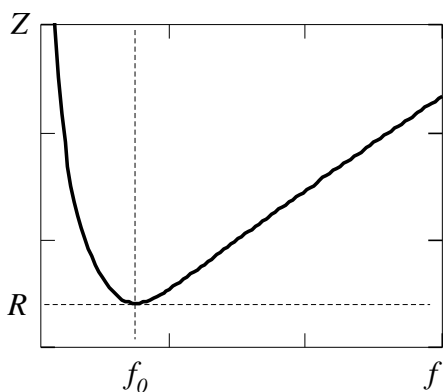
Na rys. 4 przedstawiono wykres wskazowy wielkości elektrycznych występujących w szeregowym obwodzie rezonansowym.



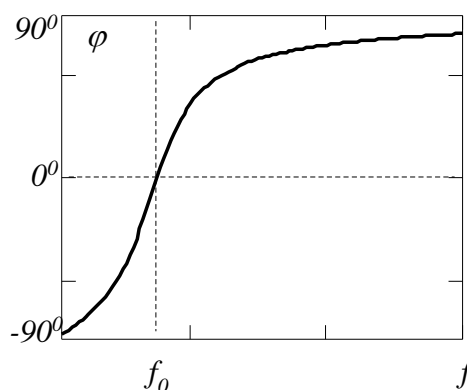
Rys.4 Wykres wskazowy napięć i prądu

Istnieje taka wartość częstotliwości f , dla której całkowita reaktancja obwodu przedstawionego na rys. 1 jest równa zero. Częstotliwość, dla której część urojona impedancji obwodu jest równa zero, nazywa się częstotliwością rezonansową. Jej wartość wyznaczyć można z zależności:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (11)$$



Rys.5 Zależność modułu impedancji od częstotliwości.



Rys.6 Charakterystyka fazowa obwodu.

Zgodnie ze wzorami (4) i (5) wartość impedancji zależy od częstotliwości napięcia zasilającego. Na rys.5 przedstawiono zależność modułu impedancji oraz na rys.6 - zależność argumentu impedancji szeregowego obwodu RLC od częstotliwości.

W szczególnym wypadku, gdy obwód jest zasilany napięciem o częstotliwości rezonansowej (obwód jest w stanie rezonansu), impedancja jest równa rezystancji tego obwodu, czyli obwód ma charakter czysto rezystancyjny.

$$\underline{Z}_0 = R \quad (12)$$

Prąd w obwodzie uzyskuje w stanie rezonansu wartość maksymalną:

$$I_0 = \frac{E}{R} \quad (13)$$

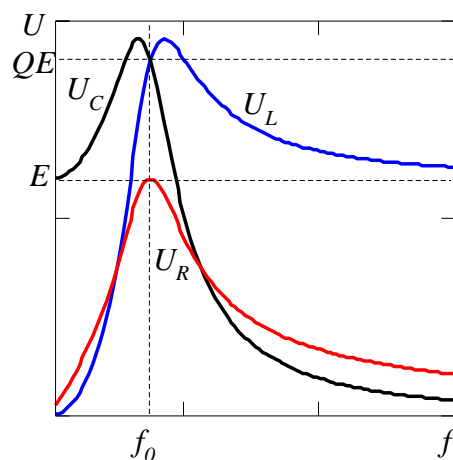
Moduły napięć na poszczególnych elementach obwodu są równe:

$$U_{R0} = E \quad (14)$$

$$U_{L0} = E \frac{\omega_0 L}{R} \quad (15)$$

$$U_{C0} = U_{L0} = E \frac{1}{\omega_0 CR} \quad (16)$$

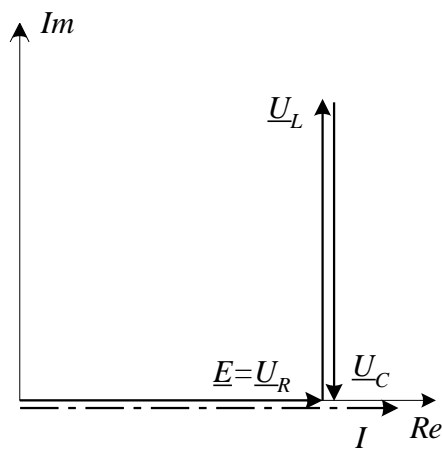
Rysunek 7 ilustruje zmiany napięć na poszczególnych elementach obwodu, w zależności od częstotliwości SEM.



Rys.7 Napięcia na poszczególnych elementach obwodu,
w zależności od częstotliwości

Należy zauważyć, że maksymalne wartości spadków napięć na indukcyjności U_L i pojemności U_C występują przy innej częstotliwości niż częstotliwość rezonansowa. Sumaryczny spadek napięcia na elementach L i C otrzymuje się odejmując od napięcia zasilającego E wartość spadku napięcia na rezystancji U_R .

Ponieważ w stanie rezonansu, wartość reaktancji indukcyjnej obwodu jest równa reaktancji pojemnościowej, moduł napięcia na indukcyjności jest równy modułowi napięcia na pojemności. W stanie rezonansu, prąd płynący w obwodzie jest w fazie z napięciem zasilającym. Wykres wskazowy napięć i prądu dla obwodu w stanie rezonansu przedstawia rys.8.



Rys.8 Wykres wskazowy napięć i prądu w stanie rezonansu.

Wielkością charakterystyczną dla obwodu rezonansowego jest współczynnik dobroci obwodu. Jest to stosunek reaktancji indukcyjnej lub pojemnościowej w stanie rezonansu do rezystancji obwodu:

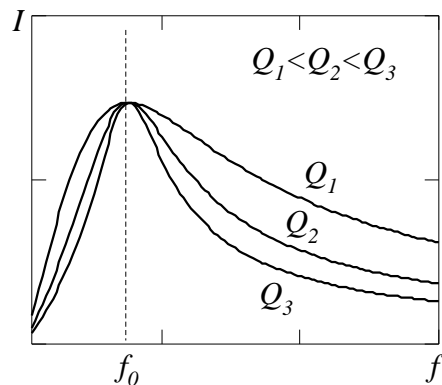
$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{I}{\omega_0 C R} = \frac{I}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (17)$$

Znając wartość współczynnika dobroci obwodu Q można wyznaczyć wartość napięcia na indukcyjności i pojemności w stanie rezonansu:

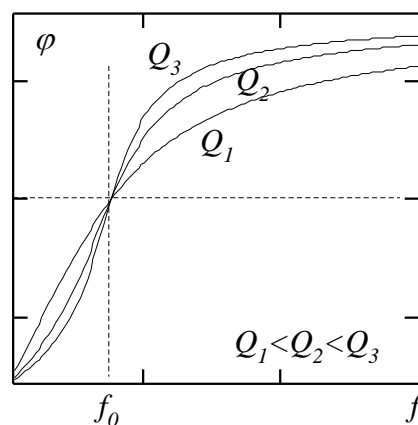
$$U_{L0} = U_{C0} = Q E = \frac{I}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} E \quad (18)$$

Dobroć można również definiować także jako stosunek odpowiednich mocy np.:

$$Q = \frac{Q_L}{P} = \frac{Q_C}{P} \quad (19)$$



Rys.9 Przebieg charakterystyki rezonansowej w zależności od dobroci układu



Rys.10 Przebieg charakterystyki fazowej w zależności od dobroci układu

Jak wynika z rys.9 i rys.10 wraz z powiększaniem dobroci krzywe rezonansowe stają się bardziej strome w otoczeniu częstotliwości rezonansowej. Charakterystyki fazowe natomiast mają w otoczeniu tego punktu większe nachylenie. Przesunięcie fazy pomiędzy SEM a prądem dąży do wartości $-\pi/2$ dla $f < f_0$ i do $+\pi/2$ dla $f > f_0$.

Oznacza to, że charakter obwodu jest pojemnościowy dla częstotliwości mniejszych od rezonansowej, a indukcyjny dla częstotliwości większych.

Szerokością pasma obwodu rezonansowego Δf nazywa się różnicę dwóch częstotliwości, dla których wielkość elektryczna analizowana w obwodzie rezonansowym (prąd, napięcie itd.) maleje do wartości $\frac{1}{\sqrt{2}}$ wartości tej wielkości w rezonansie (maleje o 3 dB).

$$\Delta f = f_2 - f_1 \quad (20)$$

Szerokość pasma przenoszenia można wyznaczyć także znając wartość częstotliwości rezonansowej i dobroci obwodu:

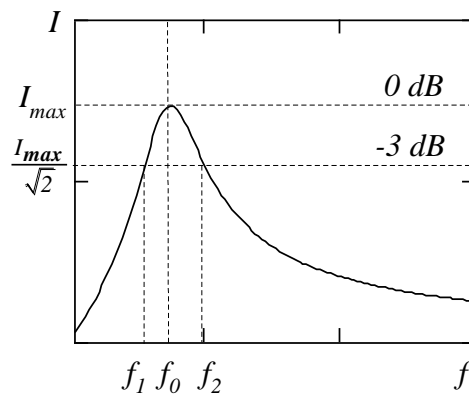
$$\Delta f = \frac{f_0}{Q} \quad (21)$$

Dokładne wartości częstotliwości granicznych można otrzymać na podstawie zależności:

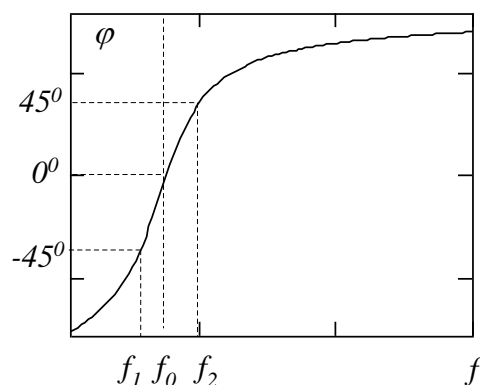
$$f_{1,2} = \pm \frac{R}{4\pi L} + \frac{1}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} \quad (22)$$

Łatwo wykazać, że dla dobroci $Q > 10$, błąd wyznaczania częstotliwości granicznych (22) nie przekracza 0.15%.

Uproszczony - graficzny sposób wyznaczania częstotliwości granicznych pokazano na rys. 11 i rys.12. Częstotliwości graniczne można wyznaczyć korzystając wprost z definicji szerokości pasma obwodu rezonansowego (20). Wówczas przy częstotliwości SEM równej częstotliwości granicznej f_1 lub f_2 , przesunięcie fazowe pomiędzy napięciem zasilającym a prądem płynącym w obwodzie jest równe 45° (rys. 12).



Rys. 11 Wyznaczanie graficzne częstotliwości granicznych na podstawie charakterystyki rezonansowej.



Rys. 12 Wyznaczanie graficzne częstotliwości granicznych na podstawie charakterystyki fazowej.

Jeżeli przez obwód rezonansowy przepływa prąd sinusoidalny (6), w rezystancji obwodu wydzielana jest moc chwilowa

$$p(t) = 2RI^2 \sin^2(\omega t - \varphi) \quad (23)$$

Energia tracona w rezystancji w okresie T

$$W_T = PT \quad (24)$$

Energia pola elektrycznego i magnetycznego

$$W_C = \frac{1}{2} C u_C^2(t) = C U_C^2 \cos^2(\omega t - \varphi) \quad (25)$$

$$W_L = \frac{1}{2} L i^2(t) = L I^2 \sin^2(\omega t - \varphi) \quad (26)$$

Energie te w stanie rezonansu (tj. dla $f = f_0$) można zapisać wykorzystując (13) i (18)

$$W_{Cmax}(t) = C(EQ)^2 \cos^2(\omega_0 t - \varphi) \quad (27)$$

$$W_{Lmax}(t) = L \left(\frac{E}{R} \right)^2 \sin^2(\omega_0 t - \varphi) \quad (28)$$

stąd

$$W = W_{Lmax}(t) + W_{Cmax}(t) = L \left(\frac{E}{R} \right)^2 = const \quad (29)$$

A zatem całkowita energia zmagazynowana w polach elektrycznym i magnetycznym jest w stanie rezonansu niezależna od czasu.

Energię tę można także powiązać z dobrocią obwodu, wykorzystując następującą zależność

$$\frac{W}{W_T} = \frac{L \left(\frac{E}{R} \right)^2}{R \left(\frac{E}{R} \right)^2 T} = \frac{L\omega_0}{R2\pi} = \frac{Q}{2\pi} \quad (30)$$

UWAGA ! Punkty programu oznaczone gwiazdką należy wykonać w ramach przygotowań do laboratorium.

3. Program ćwiczenia

1*. Zaprojektować i narysować schemat laboratoryjnego obwodu elektrycznego do badania zjawiska rezonansu szeregowego. Obwód musi zawierać szeregową gałąź **RLC**, oraz być zasilany z generatora sygnału sinusoidalnie zmiennego o regulowanej częstotliwości napięcia. Obwód powinien zawierać oscyloskop z funkcją XY ułatwiający wyznaczenie częstotliwości rezonansowej. Pierwszy kanał oscyloskopu mierzy napięcie zasilające a drugi prąd w gałęzi (proporcjonalny do spadku napięcia na **R**). Należy także uwzględnić woltomierz do pomiaru wartości napięć oraz amperomierz do pomiaru całkowitego prądu płynącego w obwodzie. (**Układ należy zaprojektować w taki sposób aby masa generatora oraz masy obu kanałów oscyloskopu miały ten sam potencjał !!!**)

Schemat układ rezonansu szeregowego.

2*. Napisz odpowiednie wyrażenie, które pozwoli Ci obliczyć częstotliwość rezonansową f_0 dla danych wartości elementów **L** i **C**.

$$f_0 =$$

3. W eksperymencie tym będziesz stosować cewki o rdzeniu powietrznym. Napisz wartość indukcyjności własnej cewki **L**, której będziesz używać.

$$L =$$

4. Przekształć wzór na częstotliwość rezonansową f_0 w celu obliczenia wartości pojemności w obwodzie **C** dla zadanej częstotliwości rezonansowej $f_0 = 3275 \text{ Hz}$.

$$C =$$

5*. Wyboru wartości rezystancji **R** musisz dokonać pamiętając, że moduł impedancji szeregowego obwodu **RLC**, w rezonansie ma najmniejszą wartość i jest równy całkowitej rezystancji obwodu. Pamiętaj, że rezystancja ta ogranicza prąd pobierany z generatora. Zbyt mała wartość rezystancji może powodować przeciążenie zasilania. Jednak mała wartość rezystancji daje korzystny, duży współczynnik dobroci obwodu szeregowego. Dlatego przy doborze wartości rezystancji musisz dokonać pewnego kompromisu. Napisz odpowiedni wzór do obliczenia współczynnika dobroci **Q**.

Q =

6. Przekształć powyższy wzór, tak aby można było obliczyć rezystancję **R** przy założonym współczynniku dobroci obwodu **Q = 1.5**.

R =

7. Należy zaokrąglić obliczoną wartość rezystancji **R** do najbliższego **1 kΩ** i ustawić tę wartość na opornicy dekadowej. Na dekadowej pojemności ustaw wartość **C** obliczoną wcześniej (pkt.4). Stosując wybrane elementy i przyrządy pomiarowe połącz obwód zgodnie ze schematem w (pkt.1).

8. Wykonaj pomiary charakterystyki częstotliwościowej układu. Utrzymując stałą wartość napięcia generatora **U = 6V** (skuteczne), mierz wartość prądu **I** oraz napięć na elementach **L** i **C** dla różnych wartości częstotliwości napięcia zasilającego. Zanotuj wyniki w poniższej tabeli. Charakterystyka powinna zawierać minimum 20 punktów pomiarowych, przy czym (ze względu na dużą stromość przebiegu w stanach bliskich rezonansowi) im częstotliwość napięcia jest bliższa **f₀** to odległość między punktami pomiarowymi na skali częstotliwości powinna być mniejsza.

f	kHz																			
U_C	V																			
U_L	V																			
I	mA																			

f	kHz													
U_C	V													
U_L	V													
I	mA													

9. Jest kilka sposobów znajdowania dokładnej wartości częstotliwości rezonansowej f_0 . Jeden z nich polega na porównaniu prądu obwodu z napięciem zasilającym. W stanie rezonansu prąd jest w fazie z napięciem. Użyj oscyloskopu włączonego do obwodu jak na schemacie.(w pkt.1). Do dwóch kanałów pomiarowych oscyloskopu doprowadź prąd obwodu i napięcie zasilające. Oscyloskop przełącz w tryb pracy X-Y. Wówczas na ekranie dla "nieresonansowych" częstotliwości trajektoria będzie miała kształt elipsy, natomiast dla częstotliwości rezonansowej będzie linią prostą.
10. Reguluj częstotliwość aż do osiągnięcia rezonansu, co stwierdzisz na podstawie kształtu trajektorii na ekranie oscyloskopu (linia prosta). Zmierz napięcia na wszystkich elementach obwodu oraz prąd rezonansowy. Wstaw zmierzone wartości do poniższej tej tabeli.

f	U	U_R	U_C	U_L	I
kHz	V	V	V	V	mA

11. Przy stałej wartości napięcia zasilającego $U = 6V$, regulując częstotliwość generatora i obserwując zmiany napięcia na elementach **L** i **C** znajdź częstotliwości, przy których napięcia te U_C , U_L uzyskują wartości maksymalne. Zapisz otrzymane wyniki w poniższej tabeli. Porównaj otrzymane napięcia z wartością napięcia zasilającego. Skomentuj otrzymane wyniki.

f	U_{Cmax}
kHz	V

f	U_{Lmax}
kHz	V

12. Opisz osie wykresu w odpowiedniej skali. Narysuj charakterystyki rezonansowe, wartości napięć na poszczególnych elementach obwodu U_C , U_L i prądu I w funkcji częstotliwości.

Charakterystyki rezonansowe obwodu szeregowego RLC.

- 13*. Podaj wyrażenie stosowane do obliczenia prądu odpowiadającego punktom połowy mocy i oblicz tę wartość.

$$I_{1/2P} =$$

14. Narysuj na wykresie prądu w funkcji częstotliwości (pkt.12), poziomą linię odpowiadającą obliczonemu prądowi połowy mocy $I_{1/2P}$ i wyznacz graficznie częstotliwości graniczne pasma przepuszczania. Wpisz wartości tych częstotliwości do tabeli.

f_1	f_2
Hz	Hz

15. Wykorzystując częstotliwości graniczne f_1 , f_2 (odczytane z charakterystyki rezonansowej) oblicz szerokość pasma przepuszczania.

$$\Delta f =$$

16. Wykorzystując częstotliwość rezonansową oraz częstotliwości graniczne oblicz współczynnik dobroci obwodu.

$$Q =$$

17. Korzystając z prawa Ohma, oblicz całkowitą rezystancję R_0 szeregowego obwodu RLC będącego w stanie rezonansu.

$$R_0 =$$

18. Wykorzystując obliczoną, całkowitą rezystancję obwodu R_0 , w stanie rezonansu oblicz jeszcze raz współczynnik dobroci Q w celu sprawdzenia jego wartości. (Obliczenia wykonaj dla indukcyjności)

$$Q_L =$$

19. Odnosząc się do rezystancji obwodu R_0 w stanie rezonansu określ rezystancję rzeczywistej cewki indukcyjnej w stanie rezonansu R_{L0}

$$R_{L0} =$$

20. Zmierz wartość rezystancji cewki gdy przepływa przez nią prąd stały R_L (np. stosując omomierz). Porównaj rezystancję R_L cewki otrzymaną podczas przepływu prądu stałego z R_{L0} obliczoną dla prądu rezonansowego. Krótko skomentuj różnice, jeśli są one ewidentne.

R_L	R_{L0}
Ω	Ω

21. Dla dowolnej częstotliwości większej od rezonansowej i mniejszej od rezonansowej wykonaj wykresy wektorowe prądu i napięć w odpowiedniej skali. Zauważ jaki wpływ ma częstotliwość przebiegu zasilającego na wartość impedancji zespolonej badanego układu.

Wykresy wektorowe

22. Ćwiczenie laboratoryjne należy zakończyć sprawdzeniem poprawności otrzymanych wyników pomiarowych, uzupełnić protokół o dane, które będą niezbędne do poprawnego wykonania sprawozdania.

Laboratorium Elektrotechniki Teoretycznej
Teoria Obwodów 2
ELR021303L

Temat ćwiczenia:

**Badanie układu cewek
sprzężonych magnetycznie**

Instytut Podstaw Elektrotechniki i Elektrotechnologii -



Zakład Elektrotechniki Teoretycznej



1. Cel i zakres ćwiczenia.

Celem ćwiczenia jest badanie obwodów elektrycznych przy wymuszeniach sinusoidalnych, zawierających liniowe cewki indukcyjne sprzężone magnetycznie.

Badania obejmują pomiar indukcyjności własnych i wzajemnych cewek, wyznaczenie impedancji zastępczych układów przy różnych połączeniach cewek, sprawdzenie bilansu mocy - w tym określenie mocy przekazywanej przez pole magnetyczne.

2. Wprowadzenie.

2.1. Wstęp teoretyczny.

Cewkami sprzężonymi nazywamy układ dwu lub więcej cewek indukcyjnych rozmieszczonych w przestrzeni w taki sposób, że strumienie magnetyczne objęte przez uzwojenia każdej cewki stanowią sumę strumieni własnych oraz strumieni wytworzonych przez prądy innych cewek.

Powyższe określenie można zapisać, używając strumieni skojarzonych, w postaci równań

$$\begin{aligned}\psi_1(t) &= \psi_{11}(t) + \psi_{12}(t) + \dots + \psi_{1n}(t) \\ \psi_2(t) &= \psi_{21}(t) + \psi_{22}(t) + \dots + \psi_{2n}(t) \\ &\vdots \\ \psi_n(t) &= \psi_{n1}(t) + \psi_{n2}(t) + \dots + \psi_{nn}(t)\end{aligned}\tag{1}$$

gdzie: ψ_k - całkowity strumień skojarzony z k -tą cewką;

ψ_{kk} - strumień skojarzony z k -tą cewką wytworzony przez prąd płynący przez tę samą cewkę;

ψ_{kj} - strumień skojarzony z k -tą cewką, wytworzony przez prąd płynący w j -tej cewce;

W ogólnym przypadku zależność strumienia od prądu ma postać $\psi = \psi(i)$ i zależy od rodzaju środowiska w jakim znajdują się cewki. Na przykład dla materiałów ferromagnetycznych zależność ta ma postać krzywej magnesowania, może przy tym charakteryzować się także histerezą.

Dla cewek liniowych (np. powietrznych - tzw. bezrdzeniowych) zależność $\psi(i)$ ma postać funkcji liniowej. Poszczególne składowe całkowitego strumienia skojarzonego z k -tą cewką, można wyrazić za pomocą następujących związków

$$\begin{aligned}\psi_{kk} &= L_k i_k \\ \psi_{kj} &= \pm M_{kj} i_j\end{aligned}\tag{2}$$

gdzie: L_k - indukcyjność własna k -tej cewki ;

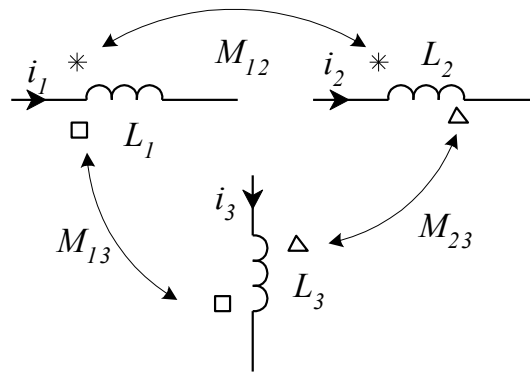
M_{kj} - indukcyjność wzajemna między cewkami 'k' i 'j', $M_{kj} = M_{jk}$;

'±' znak wyrażający zgodność kierunków¹⁾ strumienia własnego i wzajemnego ;

W celu łatwego określania znaku sprzężenia między dwoma cewkami, oznacza się tzw. zaciski **jednakoimiennie**. Prądy wpływające do zacisków jednakoimiennych wywołują strumienie magnetyczne, które się dodają (są zgodne), sprzężenie magnetyczne jest więc w tym przypadku dodatnie. Do oznaczenia na schematach zacisków jednakoimiennych stosuje się najczęściej symbol (*). A przy większej liczbie cewek można np. używać innych dodatkowych symboli takich jak np. - Δ , \square .

Przykład obwodu składającego się z 3 cewek wzajemnie sprzężonych przedstawia rys.1. Uwzględniając kierunki prądów względem zacisków jednakoimiennych określić można znaki poszczególnych sprzężeń. I tak dodatnie sprzężenie występuje między cewkami 1 i 2, ujemne między cewkami 1 i 3 oraz 2 i 3.

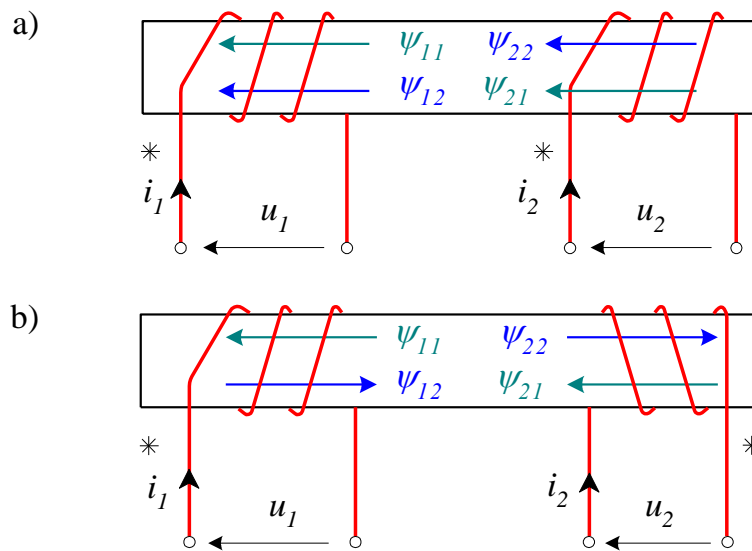
¹⁾ Strumień jest wielkością skalarną. Określenie 'kierunek' dotyczy indukcji magnetycznej związanej z tym strumieniem.



rys.1

Zaciski jednakoimienne można określać znając geometrię uzwojeń (rys.2), w szczególności jeżeli cewki znajdują się na wspólnym rdzeniu, decyduje o tym kierunek nawinięcia przewodów. Stosując regułę "prawej dłoni" określamy zwroty strumieni własnych i wzajemnych i na tej podstawie oznaczamy zaciski jednakoimienne.

Jeżeli dostęp do uzwojeń jest niemożliwy to do określenia par zacisków jednakoimiennych możemy wykorzystać metodę pomiarową, którą przedstawiono w p.2.2 .



rys.2. a) sprzężenie zgodne, b) sprzężenie przeciwne

Ograniczając rozważania do układu złożonego z dwu cewek można napisać:

przy sprzężeniu zgodnym:

$$\begin{aligned} \psi_1(t) &= L_1 i_1(t) + M i_2(t) \\ \psi_2(t) &= L_2 i_2(t) + M i_1(t) \end{aligned}$$

przy sprzężeniu przeciwnym:

$$\begin{aligned} \psi_1(t) &= L_1 i_1(t) - M i_2(t) \\ \psi_2(t) &= L_2 i_2(t) - M i_1(t) \end{aligned} \tag{3}$$

Zmienne w czasie prądy, płynące przez cewki, wywołują zmienne w czasie strumienie magnetyczne, które zgodnie z prawem indukcji Faradaya, indukują w uzwojeniach cewek siły elektromotoryczne indukcji $e_k(t)$

$$e_1(t) = -\frac{d\psi_1(t)}{dt}, \quad e_2(t) = -\frac{d\psi_2(t)}{dt} \tag{4}$$

Napięcia na cewkach, wynikające z różnicy potencjału skalarnego, wynoszą

$$u_1(t) = -e_1(t) = \frac{d\psi_1(t)}{dt}, \quad u_2(t) = -e_2(t) = \frac{d\psi_2(t)}{dt} \quad (5)$$

Stąd, uwzględniając zależności (3) i (5), otrzymujemy ogólne równania dla napięć na indukcyjnościach

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \frac{d\psi_1(t)}{dt} = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} \pm M \frac{di_2(t)}{dt} \\ u_2(t) &= \frac{d\psi_2(t)}{dt} = L_2 \frac{di_2(t)}{dt} \pm M \frac{di_1(t)}{dt} \end{aligned} \quad (6)$$

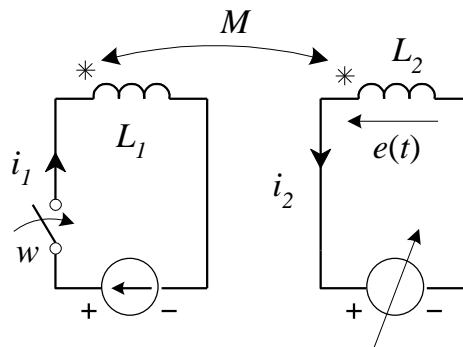
Dla obwodu z wymuszeniem sinusoidalnym, w stanie ustalonym, powyższe związki można zapisać stosując rachunek symboliczny. Uwzględniając dodatkowo rezystancje uzwojeń cewek otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= (R_1 + j\omega L_1) \underline{I}_1 \pm j\omega M \underline{I}_2 = (R_1 + jX_{L1}) \underline{I}_1 \pm j\omega M \underline{I}_2 = \underline{Z}_1 \underline{I}_1 \pm jX_m \underline{I}_2 \\ \underline{U}_2 &= (R_2 + j\omega L_2) \underline{I}_2 \pm j\omega M \underline{I}_1 = (R_2 + jX_{L2}) \underline{I}_2 \pm j\omega M \underline{I}_1 = \underline{Z}_2 \underline{I}_2 \pm jX_m \underline{I}_1 \end{aligned} \quad (7)$$

gdzie : $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2$ - impedancje własne cewek, X_m - reaktancja sprzężenia

2.2 Wyznaczanie zacisków jednoimiennych metodą pomiarową.

Wyznaczenie zacisków jednoimiennych cewek sprzężonych można dokonać posługując się prostym obwodem, który przedstawiono na rys.3. Po załączeniu wyłącznika, w obwodzie pierwszej cewki, podłączonej zaciskiem oznaczonym (*), do bieguna dodatniego źródła, przez jej uzwojenie popłynie prąd i_1 wywołując, w cewce drugiej strumień magnetyczny, którego pochodna $\frac{d\psi_{21}}{dt} > 0$.



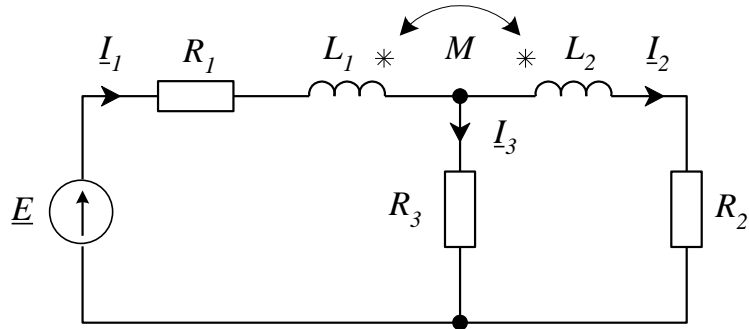
rys.3

W uzwojeniu cewki drugiej powstanie s.em. $e_2(t)$ oraz prąd $i_2(t)$, który zgodnie z zasadą przekory przeciwdziała zmianom strumienia, który go wywołał. W ten sposób można stwierdzić, że prąd $i_2(t)$ skierowany będzie od zacisku oznaczonego (*).

Jeżeli do tego zacisku podłączony jest zacisk '+' przyrządu magnetoelektrycznego to wskazówka wychyli się w kierunku dodatnim. Przy wyłączaniu zasilania, w tym przypadku, wskazówka przyrządu wychyli się w stronę przeciwną.

2.3. Wybrane metody rozwiązywanie obwodów elektrycznych zawierających indukcyności sprzężone magnetycznie.

Uwzględnianie sprzężeń magnetycznych w obwodzie może być dokonywane na kilka sposobów. Pierwszy z nich polega na wykorzystaniu bezpośrednio związków w postaci (6) lub (7) w równaniach Kirchhoffa lub w innych równaniach (np. w metodzie prądów oczkowych, potencjałów węzłowych). Druga metoda polega na zastąpieniu sprzężeń magnetycznych źródłami napięciowymi - sterowanymi prądowo. Trzeci sposób pozwala wyeliminować sprzężenie przez utworzenie schematu zastępczego. Poniżej przedstawiono wykorzystanie tych metod dla obwodu z rys.4.



rys.4

Metoda I

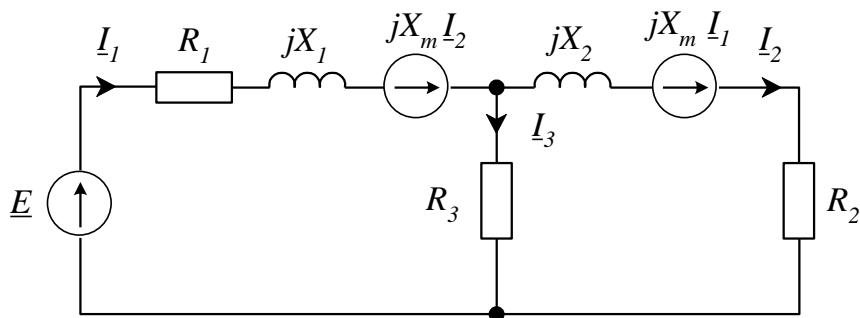
Po uwzględnienie zależności (7) w równaniach Kirchhoffa otrzymuje się układ równań, z którego można wyznaczyć wartości zespolone prądów

$$\begin{aligned} (R_1 + jX_1)I_1 - jX_m I_2 + R_3 I_3 &= E \\ R_3 I_3 - (R_2 + jX_2)I_2 + jX_m I_1 &= 0 \\ I_1 &= I_2 + I_3 \end{aligned} \tag{8}$$

Metoda II.

W równaniach (7) składniki $jX_m I_1$ i $jX_m I_2$ można potraktować jako źródła napięciowe sterowane prądowo i włączyć je do obwodu, pomijając sprzężenie magnetyczne. Powstały w ten sposób obwód może być rozwiązywany metodami ogólnie stosowanymi dla układów SLS.

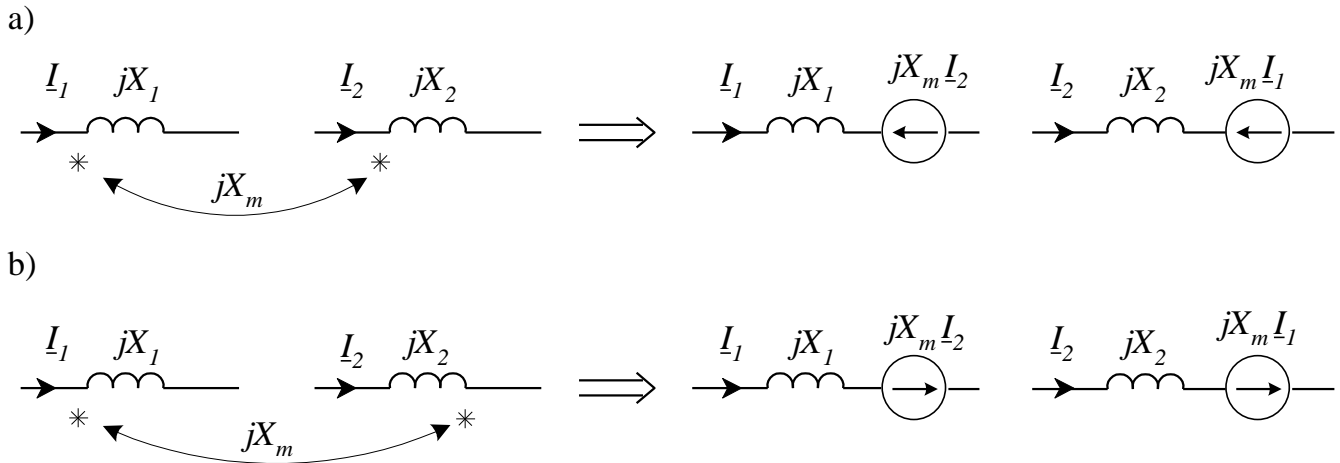
W rozpatrywanym przykładzie, schemat obwodu po rozprzęgnięciu jest następujący (rys.5).



rys.5

Kierunki napięć źródeł napięciowych ustala się na podstawie kierunków prądów względem zacisków jednoimiennych. Jeżeli prąd w cewce pierwszej jest zastrzałkowany do (od) zacisku jednoimiennego (patrząc z zewnątrz cewki) to napięcie indukcji wzajemnej w cewce drugiej będzie skierowane do (od) zacisku jednoimiennego (patrząc od środka cewki). Można również stosować prostą zasadę: przy sprzężeniu dodatnim kierunki napięć indukowanych i prądów są przeciwne, a przy sprzężeniu ujemnym kierunki te są zgodne.

Powyższe wyjaśnienie ilustruje rys.6 (a) - sprzężenie dodatnie, b) - sprzężenie ujemne)

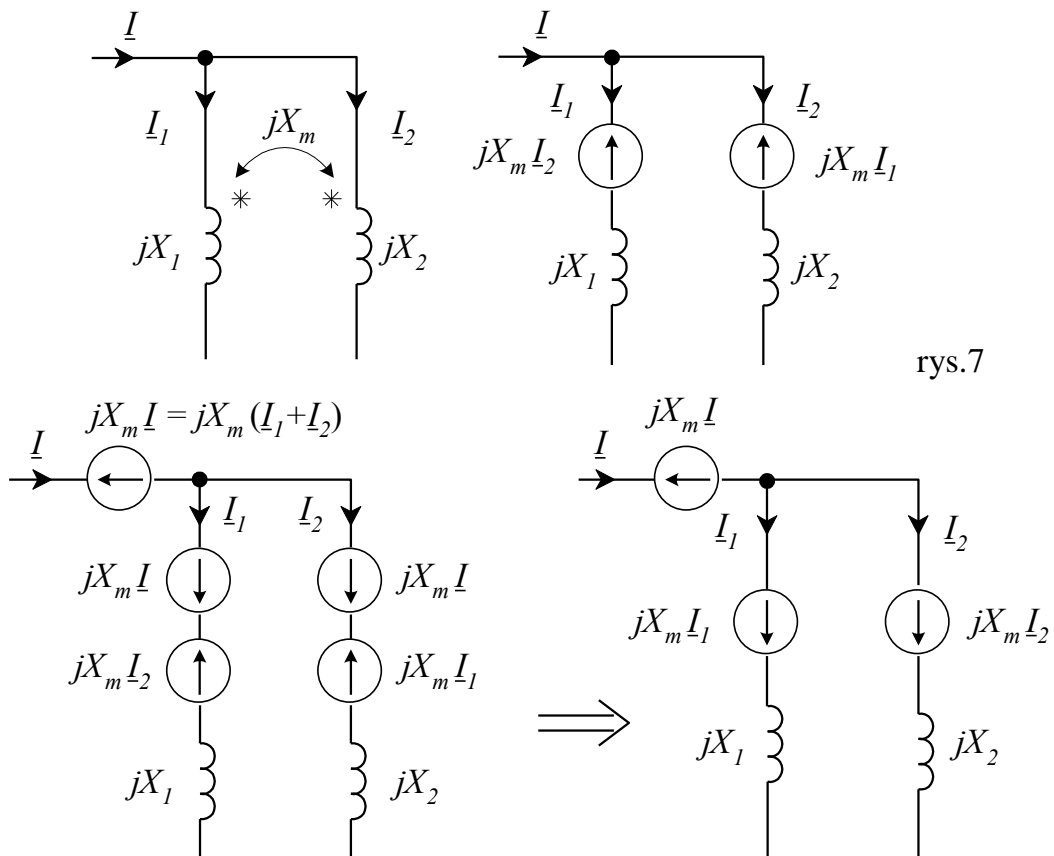


rys.6

Metoda III

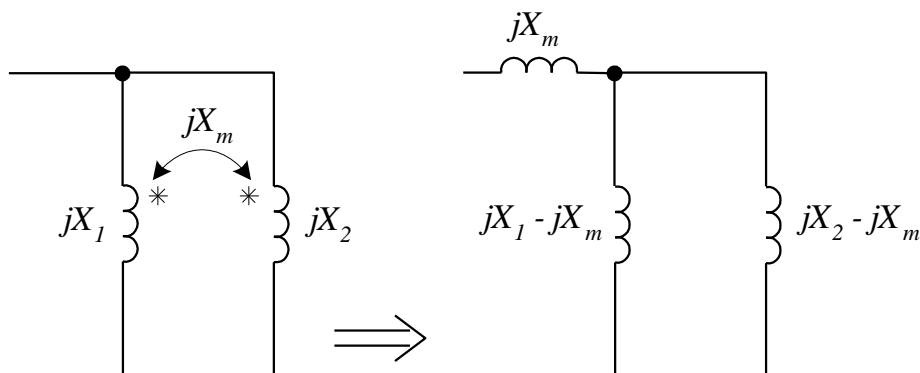
Jeżeli cewki sprzężone magnetycznie, posiadają co najmniej jeden wspólny węzeł, to obwód można przekształcić do obwodu bez sprzężeń oraz źródeł sterowanych.

Rozważmy fragment obwodu (rys.7). Stosując metodę źródeł sterowanych a następnie wykorzystując twierdzenie o włączaniu dodatkowych źródeł napięciowych, przekształcamy obwód wg rys.8.



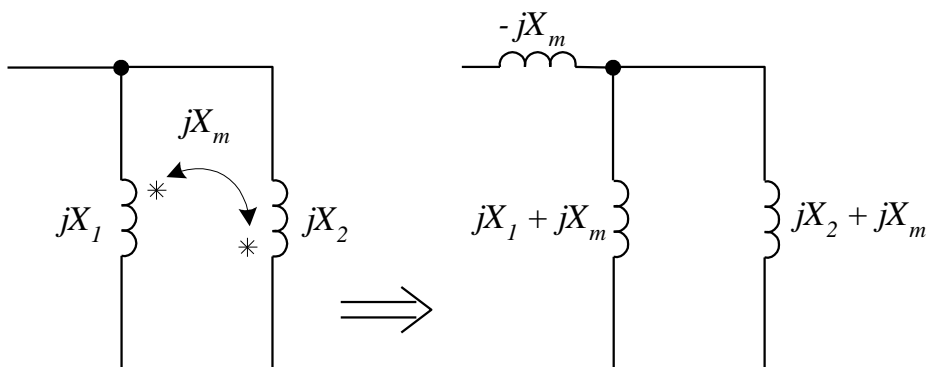
rys.8

Ostatecznie, przy połączeniu cewek zaciskami jednakoimiennymi do wspólnego węzła, otrzymujemy układ zastępczy w następującej postaci



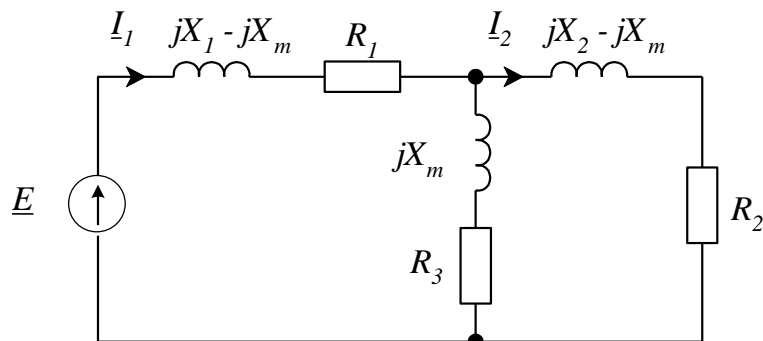
rys.9

W przypadku połączenia cewek zaciskami niejednakowymi do wspólnego węzła, otrzymujemy analogicznie



rys.10

Zastosowanie przedstawionej metody dla obwodu z rys.4 prowadzi do schematu zastępczego

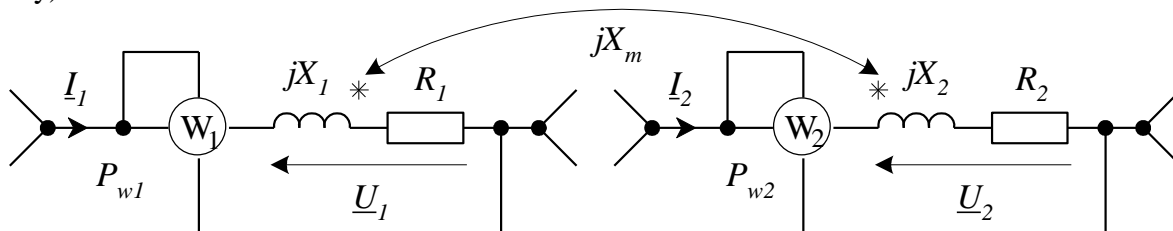


rys.11

2.3. Moc w układzie zawierającym indukcyjności sprzężone magnetycznie.

Interesującym zjawiskiem występującym w obwodzie elektrycznym ze sprzężeniem magnetycznym jest zjawisko przekazywania energii¹⁾ między gałęziami objętymi sprzężeniem.

W celu ilościowego opisu zjawiska rozważmy fragment obwodu (sposób połączenia cewek jest nieistotny)



rys.12

¹⁾ Potocznie stosuje się określenie 'moc przekazywana przez sprzężenie'

Watomierze włączone w sposób przedstawiony na rys.12 wskazują moce czynne dostarczane do gałęzi za pomocą pola elektrycznego

$$\begin{aligned}
 P_{w1} &= \mathbf{Re} \left\{ \underline{U}_1 \underline{I}_1^* \right\} = \mathbf{Re} \left\{ (\underline{Z}_1 \underline{I}_1 \pm jX_m \underline{I}_2) \underline{I}_1^* \right\} = \\
 &= \mathbf{Re} \left\{ \underline{Z}_1 \underline{I}_1^2 \pm jX_m \underline{I}_2 \underline{I}_1^* \right\} = R_1 I_1^2 \pm \mathbf{Re} \left\{ jX_m \underline{I}_2 \underline{I}_1^* \right\} \\
 P_{w2} &= \mathbf{Re} \left\{ \underline{U}_2 \underline{I}_2^* \right\} = \mathbf{Re} \left\{ (\underline{Z}_2 \underline{I}_2 \pm jX_m \underline{I}_1) \underline{I}_2^* \right\} = \\
 &= \mathbf{Re} \left\{ \underline{Z}_2 \underline{I}_2^2 \pm jX_m \underline{I}_1 \underline{I}_2^* \right\} = R_2 I_2^2 \pm \mathbf{Re} \left\{ jX_m \underline{I}_1 \underline{I}_2^* \right\}
 \end{aligned} \tag{9}$$

Stąd moc czynną pobraną przez daną gałąź można wyrazić za pomocą sumy mocy dostarczonych do niej

$$\begin{aligned}
 P_1 &= R_1 I_1^2 = \mathbf{Re} \left\{ \underline{U}_1 \underline{I}_1^* \right\} \mp \mathbf{Re} \left\{ jX_m \underline{I}_2 \underline{I}_1^* \right\} = P_{w1} + P_{m12} \\
 P_2 &= R_2 I_2^2 = \mathbf{Re} \left\{ \underline{U}_2 \underline{I}_2^* \right\} \mp \mathbf{Re} \left\{ jX_m \underline{I}_1 \underline{I}_2^* \right\} = P_{w2} + P_{m21}
 \end{aligned} \tag{10}$$

gdzie: $P_{m12}, (P_{m21})$ - moce przekazywane za pomocą pola magnetycznego do cewki pierwszej (drugiej)

Przyjmując, że $\underline{I}_1 = I_1 e^{j\psi_1}, \underline{I}_2 = I_2 e^{j\psi_2}$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 P_{m12} &= \mp \mathbf{Re} \left\{ X_m I_1 I_2 e^{j\left[\frac{\pi}{2} - (\psi_1 - \psi_2)\right]} \right\} = \pm X_m I_1 I_2 \sin(\psi_2 - \psi_1) \\
 P_{m21} &= \mp \mathbf{Re} \left\{ X_m I_1 I_2 e^{j\left[\frac{\pi}{2} - (\psi_2 - \psi_1)\right]} \right\} = \pm X_m I_1 I_2 \sin(\psi_1 - \psi_2)
 \end{aligned} \tag{11}$$

Jeżeli w układzie jest n -cewek wzajemnie sprzężonych, to dla każdej pary obowiązują równości

$$P_{mkj} + P_{mjk} = 0 \tag{12}$$

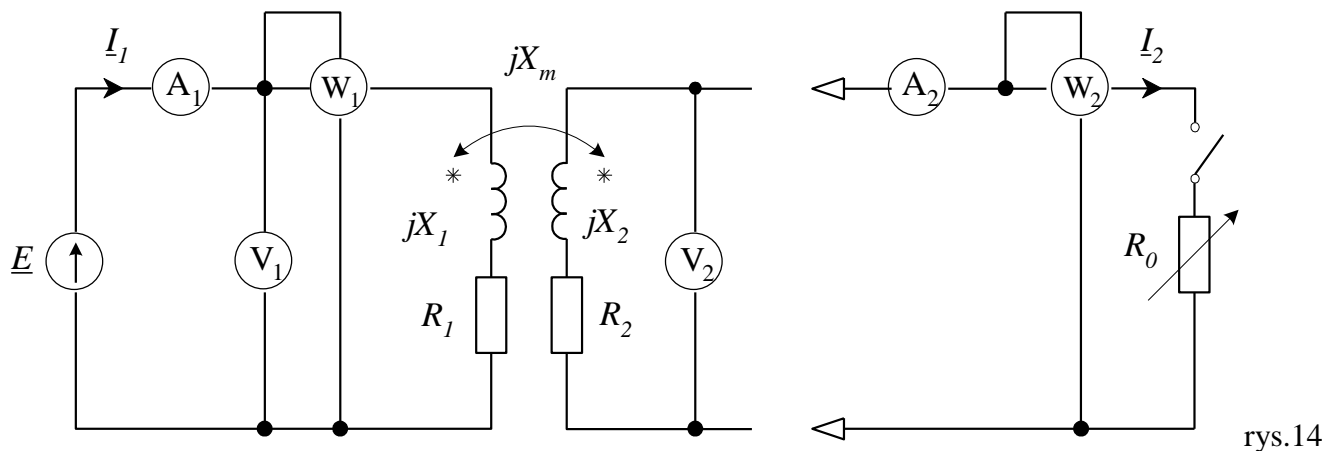
gdzie :

$$P_{mkj} = \mp \mathbf{Re} \left\{ jX_{mkj} \underline{I}_j \underline{I}_k^* \right\} = \pm X_{mkj} I_k I_j \sin(\psi_j - \psi_k) \tag{13}$$

3. Podstawowe układy połączeń - realizowane w ćwiczeniu.

3.1 Układ transformatorowy.

Schemat układu transformatorowego i jego schemat zastępczy przedstawiono na rys.14 i 15



rys.15

Układ transformatorowy bez obciążenia ($I_2 = 0$) można wykorzystać do wyznaczenia parametrów cewek oraz pomiaru indukcyjności wzajemnej.

Przedstawione poniżej zależności dotyczą przypadku zasilania układu od strony cewki nr 1, przy rozwartym uzwojeniu wtórnym.

Tabela 1

Rezystancja cewki	$R_1 = \frac{P_{w1}}{I_1^2}$
Impedancja cewki	$Z_1 = \frac{U_1}{I_1}$
Reaktancja indukcyjna cewki	$X_1 = \sqrt{Z_1^2 - R_1^2}$
Impedancja zespolona	$\underline{Z}_1 = R_1 + jX_1$
Indukcyjność własna cewki	$L_1 = \frac{X_1}{\omega}$
Reaktancja sprzężenia	$X_m = \frac{U_2}{I_1}$
Indukcyjność wzajemna	$M = \frac{X_m}{\omega}$

gdzie: $\omega = 2\pi f$ f - częstotliwość napięcia zasilającego

Zasilanie odwrotne pozwala wyznaczyć parametry cewki nr 2 wg analogicznych zależności.

Dla układu z obciążeniem po stronie wtórnej ($I_2 \neq 0$) słuszne są zależności:

Impedancja zastępcza obwodu

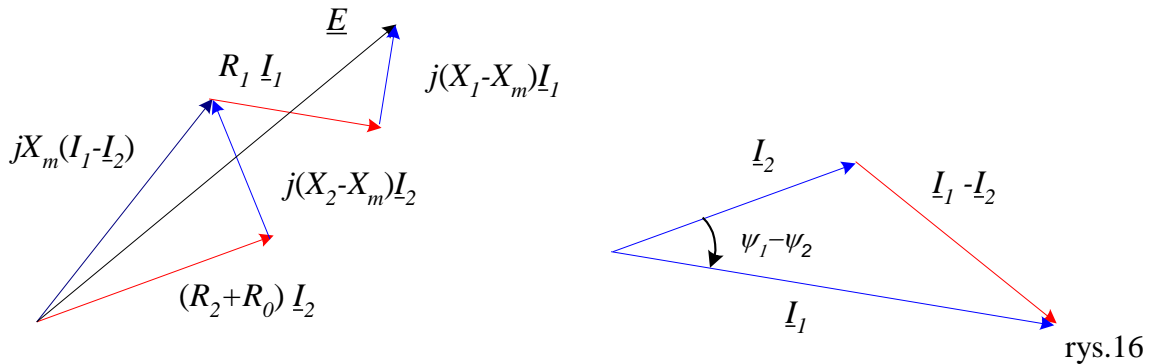
$$\underline{Z}_{we} = \underline{Z}_1 + \frac{jX_m}{R_0 + \underline{Z}_2} \quad (15)$$

Wartości zespolone prądów po stronie pierwotnej i wtórnej wynoszą odpowiednio

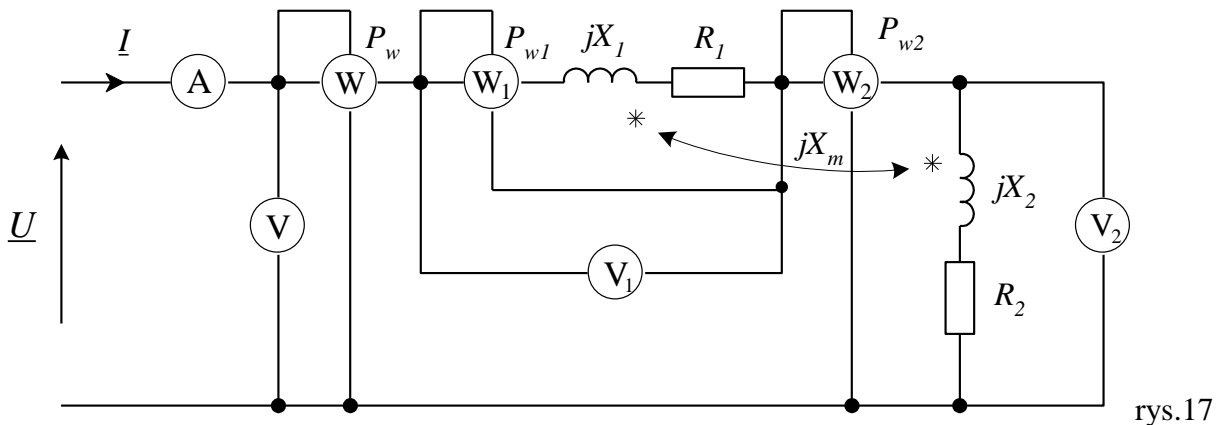
$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_{we}} = \underline{E} \frac{R_0 + \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1(R_0 + \underline{Z}_2) + X_m^2} \quad (16)$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_1 \frac{jX_m}{R_0 + \underline{Z}_2} = \underline{E} \frac{jX_m}{\underline{Z}_1(R_0 + \underline{Z}_2) + X_m^2}$$

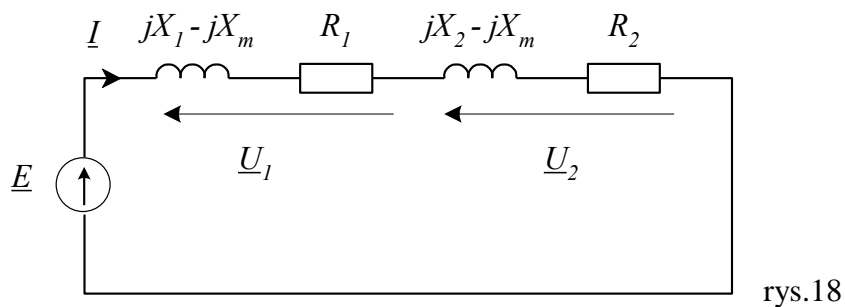
Wykres wskazowy dla obwodu obciążonego może wyglądać następująco



3.2 Układ szeregowy cewek sprzężonych magnetycznie.



Na rys.17 przedstawiono połączenie ‘przeciwnie’ cewek sprzężonych. Schemat zastępczy tego układu jest następujący



Impedancję zastępczą obwodu można obliczyć w prosty sposób

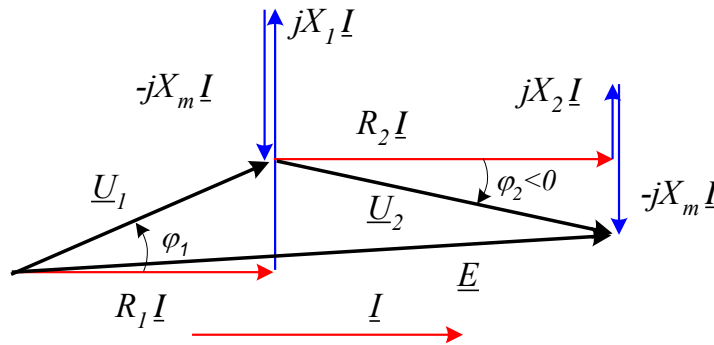
$$\underline{Z}_{we} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \pm 2jX_m \quad (17)$$

Napięcia całkowite na cewkach wynoszą odpowiednio

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= (\underline{Z}_1 \pm jX_m)\underline{I} = \underline{U}_{R1} + \underline{U}_{L1} \pm \underline{U}_{m12} = R_1\underline{I} + jX_1\underline{I} \pm jX_m\underline{I}; \\ \underline{U}_2 &= (\underline{Z}_2 \pm jX_m)\underline{I} = \underline{U}_{R2} + \underline{U}_{L2} \pm \underline{U}_{m21} = R_2\underline{I} + jX_2\underline{I} \pm jX_m\underline{I}; \end{aligned} \quad (18)$$

‘+’ - połączenie zgodne , ‘-’ - połączenie przeciwne;

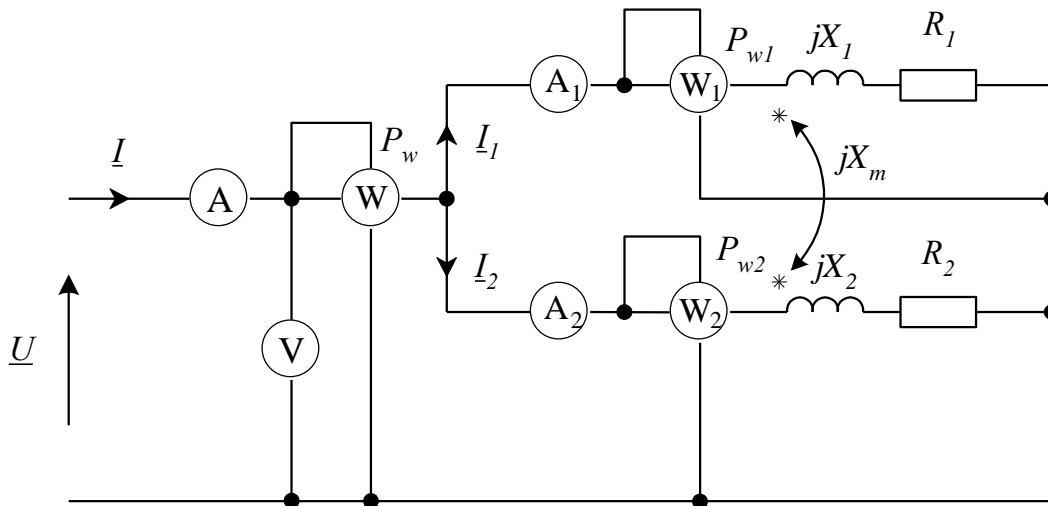
Wykres wskazowy dla połączenia szeregowego, przy sprzężeniu przeciwnym przedstawiono rys.19. W przedstawionym przykładzie reaktancja drugiej cewki ma charakter pojemnościowy.



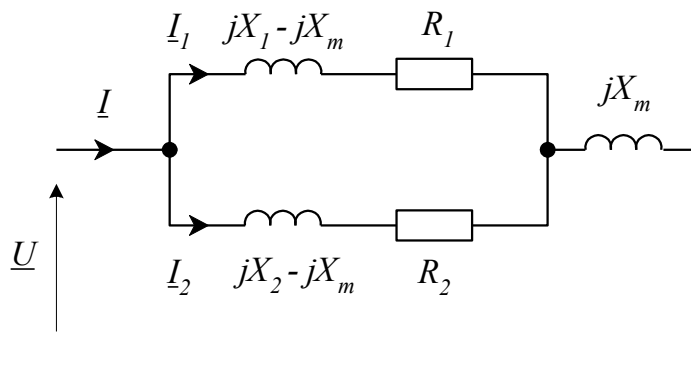
rys.19

3.3 Układ równoległy cewek sprzężonych magnetycznie.

Układ równoległy i jego schemat zastępczy przedstawiony jest na rys.20 i 21



rys.20



rys.21

Na podstawie schematu zastępczego wyznaczyć można impedancję zastępczą, prądy w poszczególnych gałęziach obwodu, moce dostarczane do gałęzi za pomocą pola elektrycznego i magnetycznego.

W przedstawionych zależnościach górny znak dotyczy sprzężenia jak na rys.20, dolny sprzężenia przeciwnego. Impedancja zastępcza obwodu

$$\underline{Z}_{we} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + X_m^2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \mp 2jX_m} \quad (19)$$

Wartości zespolone prądu całkowitego oraz prądów płynących przez cewki wynoszą odpowiednio

$$\underline{I} = \frac{U}{\underline{Z}_{we}} = U \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \mp 2jX_m}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + X_m^2} \quad (20)$$

$$\underline{I}_1 = \underline{I} \frac{\underline{Z}_2 \mp jX_m}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \mp 2jX_m} = U \frac{\underline{Z}_2 \mp jX_m}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + X_m^2} \quad (21)$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I} \frac{\underline{Z}_1 \mp jX_m}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \mp 2jX_m} = U \frac{\underline{Z}_1 \mp jX_m}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + X_m^2} \quad (22)$$

Moce wskazywane przez watomierze w gałęziach cewek wynoszą

$$P_{w1} = \frac{U^2}{|\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + X_m^2|^2} \left[Z_2^2 R_1 + X_m^2 R_2 \mp X_m (R_1 X_2 + R_2 X_1) \right] \quad (23)$$

$$P_{w2} = \frac{U^2}{|\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + X_m^2|^2} \left[Z_1^2 R_2 + X_m^2 R_1 \mp X_m (R_1 X_2 + R_2 X_1) \right] \quad (24)$$

Wykorzystując zależność (11) oraz (21) i (22) wyprowadza się wyrażenie określające moc przekazywaną przez pole magnetyczne z gałęzi 1 do 2

$$P_{m21} = \frac{U^2 X_m}{|\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + X_m^2|^2} \left[X_m (R_2 - R_1) \pm (X_2 R_1 - X_1 R_2) \right] \quad (25)$$

4. Pytania kontrolne

1. Co to jest strumień magnetyczny i strumień magnetyczny skojarzony?
2. Czym zasadniczo różni się pole elektryczne towarzyszące zmiennemu w czasie polu magnetycznemu od pola elektrycznego wytworzonego przez ładunki elektryczne?
3. Podać równanie Maxwella, z którego wynika prawo Faradaya.
4. Co to są zaciski jednoimiennie i jak można określić je pomiarowo?
5. Co to jest indukcyjność własna i wzajemna ? Co to jest współczynnik sprzężenia ?
6. Czy prawo Faradaya dotyczy tylko pól zmiennych w czasie ? Jeżeli nie to podać inne przypadki jego zastosowania.
7. Napisać równania Kirchhoffa dla prostego obwodu zawierającego cewki sprzężone.
8. Podać i omówić metody rozprzęgania obwodów zawierających cewki sprzężone magnetycznie.
9. Jak wyznaczyć pomiarowo moc przekazywaną przez sprzężenie? Czy w układzie szeregowym występuje zjawisko przekazywania mocy przez sprzężenie ?
10. Wyprowadzić wzór na moc przekazywaną przez sprzężenie dla układu zawierającego n - cewek.
11. Narysować wykres wskazowy prądów i napięć przy sprzężeniu transformatorowym oraz przy szeregowym połączeniu cewek sprzężonych.
12. Podać przykład obwodu zawierającego cewki sprzężone, w którym jedna z cewek ma charakter pojemnościowy. Wyjaśnić co to oznacza ?

5. Program ćwiczenia

1. Wyznaczanie zacisków jednoimiennych.

Połączyć układ według schematu przedstawionego na rys.3. Przyrząd magnetoelektryczny (amperomierz, woltomierz lub przyrząd uniwersalny) nastawić na możliwy najmniejszy zakres pomiarowy. Włączając zasilanie ze źródła napięcia stałego, obserwować kierunek wychylenia się wskazówki przyrządu.

Jeżeli przy załączaniu, wskazówka przyrządu wychyli się w kierunku właściwym (dodatnim) oznacza to, że zacisk cewki pierwszej podłączony do bieguna dodatniego źródła oraz zacisk cewki drugiej podłączony do zacisku oznaczonego '+' przyrządu, stanowią parę zacisków jednoimiennych.

Przy tym połączeniu, podczas wyłączania napięcia, wskazówka przyrządu powinna wychylić się w stronę przeciwną.

2. Badanie układu transformatorowego.

2.1 Wyznaczenie charakterystyki $M = M(d)$. Pomiar parametrów cewek.

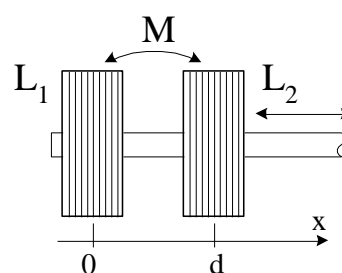
a) Połączyć układ pomiarowy wg schematu przedstawionego na rys.14. Zmieniając odległość pomiędzy cewkami co 10 mm od d_{min} do d_{max} dokonać pomiaru prądu, mocy oraz napięć na cewkach (rys.18). Następnie podłączyć zasilanie do drugiej cewki i powtórzyć pomiar jeszcze raz w pełnym zakresie zmian odległości między cewkami.

b) Obliczenia wykonać wg zależności przedstawionych w tabeli 1.

c) Wykreślić zależności $M = M(d)$, $k = k(d)$.

gdzie: $k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$ - współczynnik sprzężenia.

d) Dla wybranego pomiaru wykonać wykres wskazowy.



rys.22

2.2 Badanie układu transformatorowego z obciążeniem rezystancyjnym - zadanie dodatkowe

Układ pomiarowy z p. 2.1 obciążyć po stronie wtórnej rezystancją R_0 .

a) Dla zadanej wartości indukcyjności wzajemnej i napięcia zasilającego, zmieniając rezystancję obciążenia, zmierzyć wartości prądów, napięć oraz mocy w układzie.

b) Dokonać obliczenia zawartych w tabeli a niezmiernych wielkości. (m.in. mocy przekazanej przez sprzężenie)

c) Wykonać wykres wskazowy dla wybranego pomiaru.

d) Wykreślić zależności prądów w funkcji obciążenia.

3. Badanie układu cewek sprzężonych, połączonych szeregowo.

Połączyć układ pomiarowy wg schematu przedstawionego na rys. 17.

a) Przy zadanej wartości indukcyjności wzajemnej oraz napięcia zasilającego wyznaczyć wartości prądu, napięć oraz mocy w układzie. Pomiar wykonać dla dwóch przypadków sprzężenia - dodatniego i ujemnego.

b) Wyznaczyć z pomiarów oraz na podstawie znanych parametrów cewek impedancje zastępcze.

gdzie: impedancja "zmierzona" określona jest zależnością: $\underline{Z}_{zm} = \frac{U}{I} e^{j \arctg \frac{P_w}{UI}}$

c) Wyznaczyć na podstawie pomiarów wartości zespolone napięć w układzie.

Porównać je z wartościami obliczonymi.

d) Wykonać wykres wskazowy dla przeprowadzonych pomiarów.

4. Badanie układu cewek sprzężonych, połączonych równolegle.

Połączyć układ pomiarowy wg schematu przedstawionego na rys. 20.

- a) Przy zadanej wartości indukcyjności wzajemnej oraz napięcia zasilającego wyznaczyć wartości prądów oraz mocy w układzie. Pomiary wykonać dla dwóch przypadków sprzężenia.
- b) Wyznaczyć z pomiarów a następnie na podstawie znanych parametrów cewek impedancje zastępcze. Porównać wyniki.
- c) Wyznaczyć na podstawie pomiarów wartości zespolone prądów i napięć w układzie. Porównać je z wartościami obliczonymi.
- d) Na podstawie bilansu mocy obliczyć moc przekazywaną przez sprzężenie. Porównać ją z wartością obliczoną wg wzorów (11) i (24).

Laboratorium Podstaw Elektrotechniki

Temat ćwiczenia:

Badanie układów trójfazowych

Instytut Podstaw Elektrotechniki i Elektrotechnologii -

Zakład Elektrotechniki Teoretycznej



1. Celem i zakres ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest poznanie zjawisk występujących w układach trójfazowych, porównanie wyników pomiaru z analizą teoretyczną oraz interpretacja uzyskanych wyników za pomocą wykresów wskazowych.

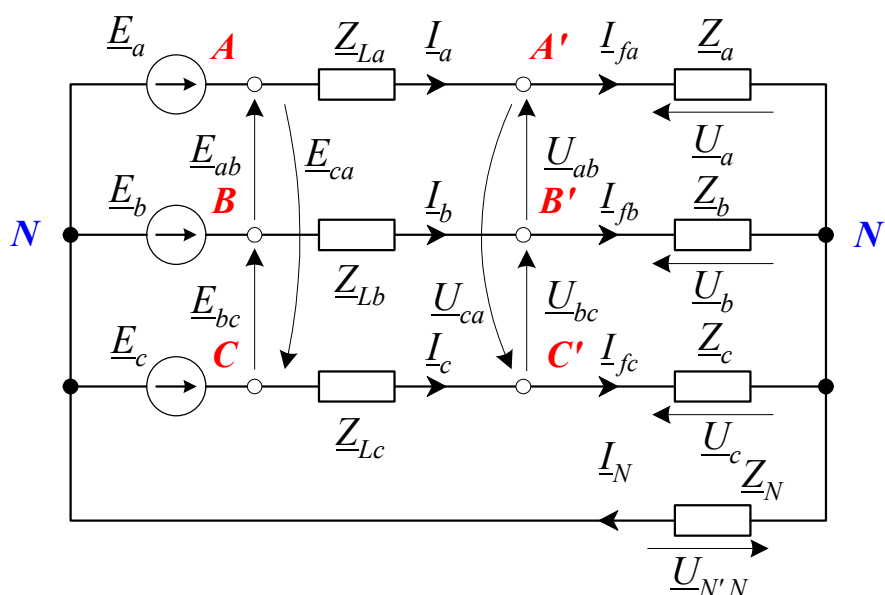
Przedmiotem badań jest sieć trójfazowa, zasilana z symetrycznego źródła napięcia, przy dwóch rodzajach połączeń odbiornika - w gwiazdę oraz trójkąt, zarówno w warunkach pracy normalnej, jak i awaryjnej.

Jeżeli napięcia źródłowe tworzą układ symetryczny, a impedancja obciążenia każdej fazy jest taka sama, to taki układ nazywamy układem **symetrycznym**. Jeśli któryś z tych warunków nie jest spełniony, to taki układ jest układem **niesymetrycznym**.

2. Układy trójfazowe z odbiornikiem połączonym w gwiazdę.

2.1. Zależności ogólne.

Rozpatrzmy przedstawiony na Rys. 2.1 układ trójfazowy. Składa się on z trzech odbiorników $\underline{Z}_a, \underline{Z}_b, \underline{Z}_c$ połączonych w gwiazdę i zasilanych trzema synchronicznymi źródłami napięcia $\underline{E}_a, \underline{E}_b, \underline{E}_c$, połączonymi również w gwiazdę o punkcie neutralnym N .



Rys. 2.1

Przedstawiony układ jest układem czteroprzewodowym, tj. punkty neutralne źródła i odbiornika połączone są dodatkowo tzw. przewodem zerowym o impedancji \underline{Z}_N .

W układzie z odbiornikiem połączonym w gwiazdę stosuje się następujące nazwy wielkości:

- Prądy $\underline{I}_a, \underline{I}_b, \underline{I}_c$ - nazywa się prądami przewodowymi, natomiast $\underline{I}_{fa}, \underline{I}_{fb}, \underline{I}_{fc}$ - prądami fazowymi, przy czym:

$$\underline{I}_a = \underline{I}_{fa}, \underline{I}_b = \underline{I}_{fb}, \underline{I}_c = \underline{I}_{fc} \quad (2.1)$$

- Napięcia $\underline{E}_a, \underline{E}_b, \underline{E}_c$ nazywa się napięciami fazowymi źródła, a $\underline{U}_a, \underline{U}_b, \underline{U}_c$ napięciami fazowymi odbiornika.

- Napięcia $\underline{E}_{ab}, \underline{E}_{bc}, \underline{E}_{ca}$ oraz $\underline{U}_{ab}, \underline{U}_{bc}, \underline{U}_{ca}$ są to tzw. napięcia międzyfazowe (dawn. przewodowe) odpowiednio - źródła i odbiornika. Wynikają one z różnicy napięć fazowych:

$$\underline{E}_{ab} = \underline{E}_a - \underline{E}_b, \quad \underline{E}_{bc} = \underline{E}_b - \underline{E}_c, \quad \underline{E}_{ca} = \underline{E}_c - \underline{E}_a \quad (2.2)$$

$$\underline{U}_{ab} = \underline{U}_a - \underline{U}_b, \quad \underline{U}_{bc} = \underline{U}_b - \underline{U}_c, \quad \underline{U}_{ca} = \underline{U}_c - \underline{U}_a \quad (2.3)$$

Niezależnie od impedancji odbiornika, wskazy napięć międzyfazowych tworzą trójkąt, tzn. ich suma jest zawsze równa zero (oznacza to, że układ napięć międzyfazowych zawiera wyłącznie składowe symetryczne zgodną i przeciwną)

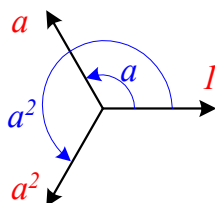
$$\underline{U}_{ab} + \underline{U}_{bc} + \underline{U}_{ca} = 0, \quad \underline{E}_{ab} + \underline{E}_{bc} + \underline{E}_{ca} = 0 \quad (2.4)$$

Jeżeli impedancje linii zasilających są pomijalnie małe to odpowiednie napięcia międzyfazowe źródła i odbiornika są sobie równe.

W dalszej części niniejszego opracowania zakładać będziemy zgodną kolejność faz źródeł napięcia, czyli:

$$\begin{aligned} \underline{E}_a &= E e^{j\psi} \\ \underline{E}_b &= e^{-j\frac{2\pi}{3}} \underline{E}_a = a^{-1} \underline{E}_a = a^2 \underline{E}_a \\ \underline{E}_c &= e^{j\frac{2\pi}{3}} \underline{E}_a = a \underline{E}_a \end{aligned} \quad (2.5)$$

gdzie: $a = e^{j\frac{2\pi}{3}}$ - oznacza - operator obrotu o kąt 120°



Rys. 2.2

W ogólnym przypadku odbiornika połączonego w gwiazdę wyznaczenie prądów w poszczególnych fazach układu odbywa się w następujący sposób:

1. Wyznaczamy napięcie między punktami neutralnymi odbiornika i źródła.:

$$\underline{U}_{N'N} = \frac{\underline{Y}_a \underline{E}_a + \underline{Y}_b \underline{E}_b + \underline{Y}_c \underline{E}_c}{\underline{Y}_a + \underline{Y}_b + \underline{Y}_c + \underline{Y}_N} \quad (2.6)$$

2. Wykorzystując (2.6) obliczamy napięcia fazowe odbiornika:

$$\underline{U}_a = \underline{E}_a - \underline{U}_{N'N}, \quad \underline{U}_b = \underline{E}_b - \underline{U}_{N'N}, \quad \underline{U}_c = \underline{E}_c - \underline{U}_{N'N} \quad (2.7)$$

3. Przy założeniu, że odbiornik nie zawiera sprzężeń magnetycznych, wyznaczmy prądy w fazach odbiornika oraz w przewodzie zerowym:

$$\underline{I}_{fa} = \frac{\underline{U}_a}{\underline{Z}_a + \underline{Z}_{La}}, \quad \underline{I}_{fb} = \frac{\underline{U}_b}{\underline{Z}_b + \underline{Z}_{Lb}}, \quad \underline{I}_{fc} = \frac{\underline{U}_c}{\underline{Z}_c + \underline{Z}_{Lc}}, \quad \underline{I}_N = \frac{\underline{U}_{N'N}}{\underline{Z}_N} = \underline{I}_a + \underline{I}_b + \underline{I}_c \quad (2.8)$$

4. Prądy przewodowe określone są związkami (2.1)

Rozważyć można dwa szczególne przypadki zasilania:

a) $\underline{Z}_N = 0 \quad \underline{Y}_N = \infty$ -

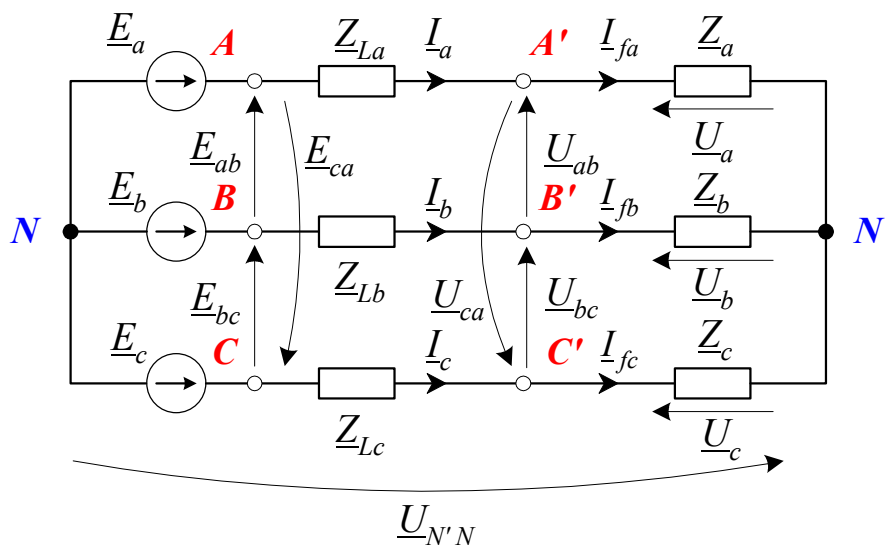
Wówczas dla dowolnych wartości impedancji fazowych (różnych od zera)

$$\underline{U}_{N'N} = 0 \tag{2.9}$$

oraz

$$\underline{U}_a = \underline{E}_a, \underline{U}_b = \underline{E}_b, \underline{U}_c = \underline{E}_c \tag{2.10}$$

b) $\underline{Y}_N = 0 \quad \underline{Z}_N = \infty$ - jest to zasilanie trójprzewodowe (tzw. odbiornik z izolowanym punktem zerowym) (Rys. 2.3).

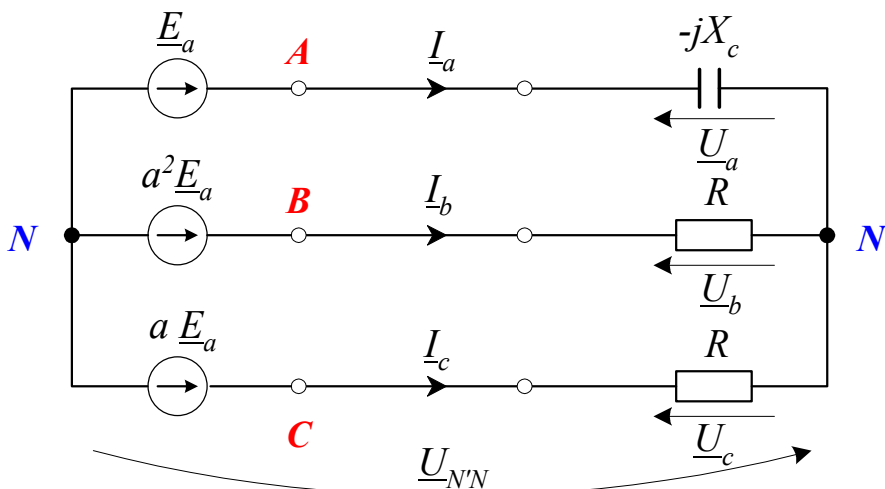


Rys. 2.3

Zachodzi w tym przypadku oczywisty związek

$$\underline{I}_a + \underline{I}_b + \underline{I}_c = 0 \tag{2.11}$$

Jako ilustrację rozważmy obwód przedstawiony na Rys. 2.4. W układzie tym w jednej fazie włączono kondensator, a pozostałych dwóch rezystory. Niech dodatkowo spełniony będzie warunek $X_c = R$. Wykażemy, że układ ten można wykorzystać do kontroli kolejności faz, poprzez pomiar napięć w fazach zawierających rezystory.



Rys. 2.4

Uwzględniając w zależności (2.6) zgodną kolejność faz wg (2.5) obliczamy napięcie $\underline{U}_{N'N}$

$$\underline{U}_{N'N} = \frac{\frac{1}{-jX_c} \underline{E}_a + \frac{1}{R} \underline{E}_b + \frac{1}{R} \underline{E}_c}{\frac{1}{-jX_c} + \frac{2}{R}} \stackrel{R=X_c}{=} \frac{j \underline{E}_a + \underline{E}_b + \underline{E}_c}{2+j} = \frac{-1+j}{2+j} \underline{E}_a \quad (2.12)$$

Stąd na podstawie (2.7), wartości zespolone napięć fazowych \underline{U}_b i \underline{U}_c wynoszą

$$\begin{aligned} \underline{U}_b &= \underline{E}_b - \underline{U}_{N'N} = a^2 \underline{E}_a - \frac{-1+j}{2+j} \underline{E}_a = \left(a^2 - \frac{-1+j}{2+j} \right) \underline{E}_a \\ \underline{U}_c &= \underline{E}_c - \underline{U}_{N'N} = a \underline{E}_a - \frac{-1+j}{2+j} \underline{E}_a = \left(a - \frac{-1+j}{2+j} \right) \underline{E}_a \end{aligned} \quad (2.13)$$

Po kilku prostych działaniach

$$a^2 = -\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad a = -\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \frac{-1+j}{2+j} = \frac{(-1+j)(2-j)}{5} = \frac{-1+3j}{5} = -\frac{1}{5} + j \frac{3}{5}$$

$$\left| a^2 - \frac{-1+j}{2+j} \right| = \left| -\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{1}{5} + j \frac{3}{5} \right) \right| = \left| -\frac{1}{2} + \frac{1}{5} - j \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{5} \right) \right| = \frac{1}{10} \left| -3 - j(5\sqrt{3} + 6) \right| \approx 1.5$$

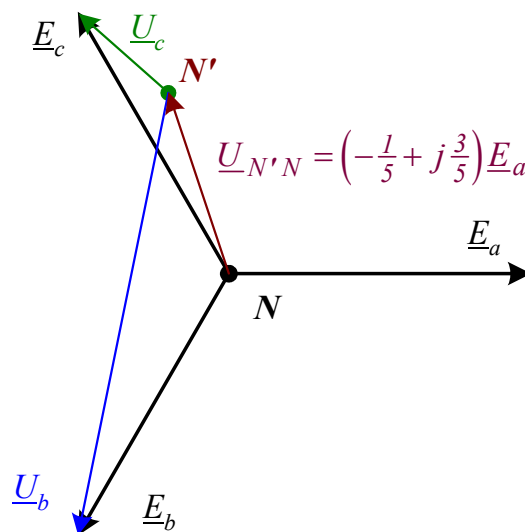
$$\left| a - \frac{-1+j}{2+j} \right| = \left| -\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{1}{5} + j \frac{3}{5} \right) \right| = \left| -\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + j \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{5} \right) \right| = \frac{1}{10} \left| -3 + j(5\sqrt{3} - 6) \right| \approx 0.4$$

otrzymujemy ostatecznie

$$\begin{aligned} U_b &= \left| a^2 - \frac{-1+j}{2+j} \right| E_a \approx 1.5 E_a \\ U_c &= \left| a - \frac{-1+j}{2+j} \right| E_a = 0.4 E_a \end{aligned} \quad (2.14)$$

Stwierdzamy więc, że napięcie fazowe w fazie opóźnionej względem fazy, w której włączony został kondensator, jest blisko czterokrotnie większe aniżeli w fazie poprzedzającej tę fazę (por. wykres wskazowy Rys. 2.5).

Jeżeli zatem jako rezystory użyjemy żarówek, wówczas łatwo zaobserwujemy różnicę w jasności ich świecenia, odzwierciedlającą różnicę wartości napięć (2.14).

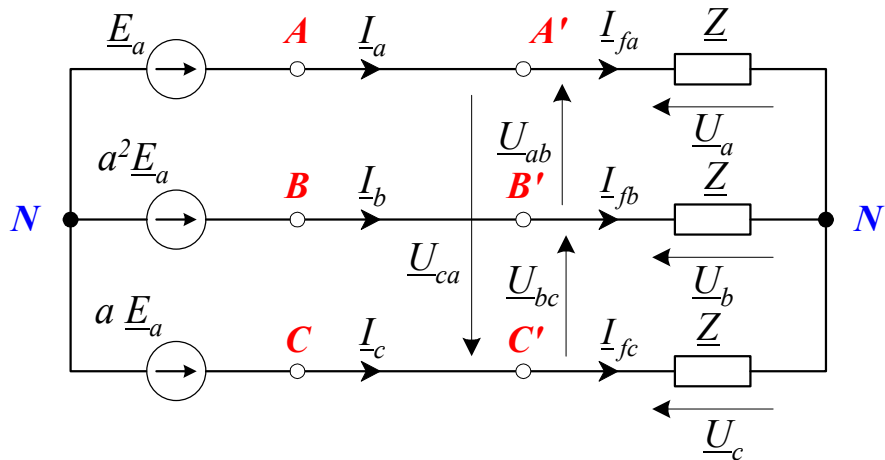


Rys. 2.5

2.2. Układ symetryczny.

W tym przypadku impedancje faz odbiornika są równe i wyrażają się wzorem:

$$\underline{Z}_a = \underline{Z}_b = \underline{Z}_c = \underline{Z} = R + jX = Ze^{j\varphi} \quad (2.15)$$



Rys. 2.6

Ponieważ suma napięć fazowych symetrycznego źródła zgodnego jest równa zero, tak więc w tym przypadku $\underline{U}_{N'N} = 0$.

$$\underline{U}_{N'N} = \frac{\underline{Y}_a \underline{E}_a + \underline{Y}_b \underline{E}_b + \underline{Y}_c \underline{E}_c}{\underline{Y}_a + \underline{Y}_b + \underline{Y}_c + \underline{Y}_N} = \frac{\underline{Y}(\underline{E}_a + \underline{E}_b + \underline{E}_c)}{3\underline{Y}} = 0 \quad (2.16)$$

gdzie: $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$

Uwzględniając dodatkowo (2.7) stwierdzamy, że napięcia fazowe odbiornika (przy pominięciu impedancji przewodów zasilających) wynoszą odpowiednio:

$$\underline{U}_a = \underline{E}_a, \quad \underline{U}_b = \underline{E}_b, \quad \underline{U}_c = \underline{E}_c \quad (2.17)$$

Stąd obliczamy prądy poszczególnych faz :

$$\begin{aligned} \underline{I}_a &= \frac{\underline{E}_a}{\underline{Z}} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}} e^{j(\psi - \varphi)} \\ \underline{I}_b &= \frac{\underline{E}_b}{\underline{Z}_b} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}} a^2 e^{j(\psi - \varphi)} = a^2 \underline{I}_a, \\ \underline{I}_c &= \frac{\underline{E}_c}{\underline{Z}_c} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}} a e^{j(\psi - \varphi)} = a \underline{I}_a \end{aligned} \quad (2.18)$$

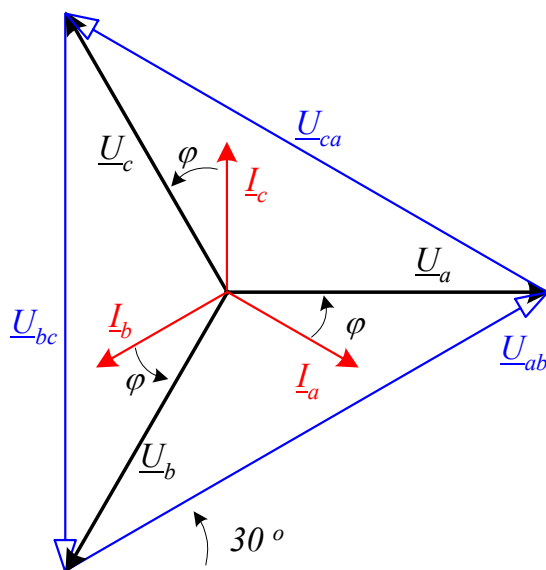
Uwzględniając (2.17) obliczamy napięcia międzyfazowe :

$$\begin{aligned} \underline{U}_{ab} &= \underline{U}_a - \underline{U}_b = \underline{E}_a - a^2 \underline{E}_a = (1 - a^2) \underline{E}_a = \sqrt{3} e^{j30^\circ} \underline{E}_a \\ \underline{U}_{bc} &= \underline{U}_b - \underline{U}_c = a^2 \underline{E}_a - a \underline{E}_a = (a^2 - a) \underline{E}_a = -j\sqrt{3} \underline{E}_a \\ \underline{U}_{ca} &= \underline{U}_c - \underline{U}_a = a \underline{E}_a - \underline{E}_a = (a - 1) \underline{E}_a = \sqrt{3} e^{j150^\circ} \underline{E}_a \end{aligned} \quad (2.19)$$

Moduły napięć międzyfazowych są zatem jednakowe i równe modułowi napięcia fazowego pomnożonego przez $\sqrt{3}$

$$U = \sqrt{3} U_f \quad (2.20)$$

Na Rys. 2.7 przedstawiono przykładowy wykres wektorowy, dla układu symetrycznego z odbiornikiem o charakterze indukcyjnym.

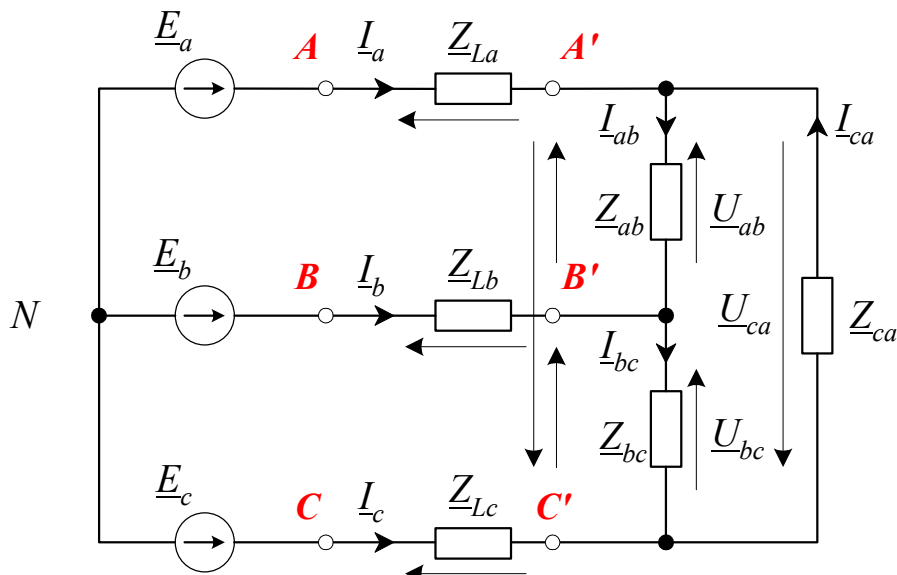


Rys. 2.7

3. Układy trójfazowe z odbiornikiem połączonym w trójkąt.

3.1. Zależności ogólne.

Drugim podstawowym układem odbiornika jest połączenie impedancji fazowych w tzw. trójkąt Rys. 3.1.



Rys. 3.1

Zachodzą w tym przypadku następujące (oczywiste) związki oraz właściwości:

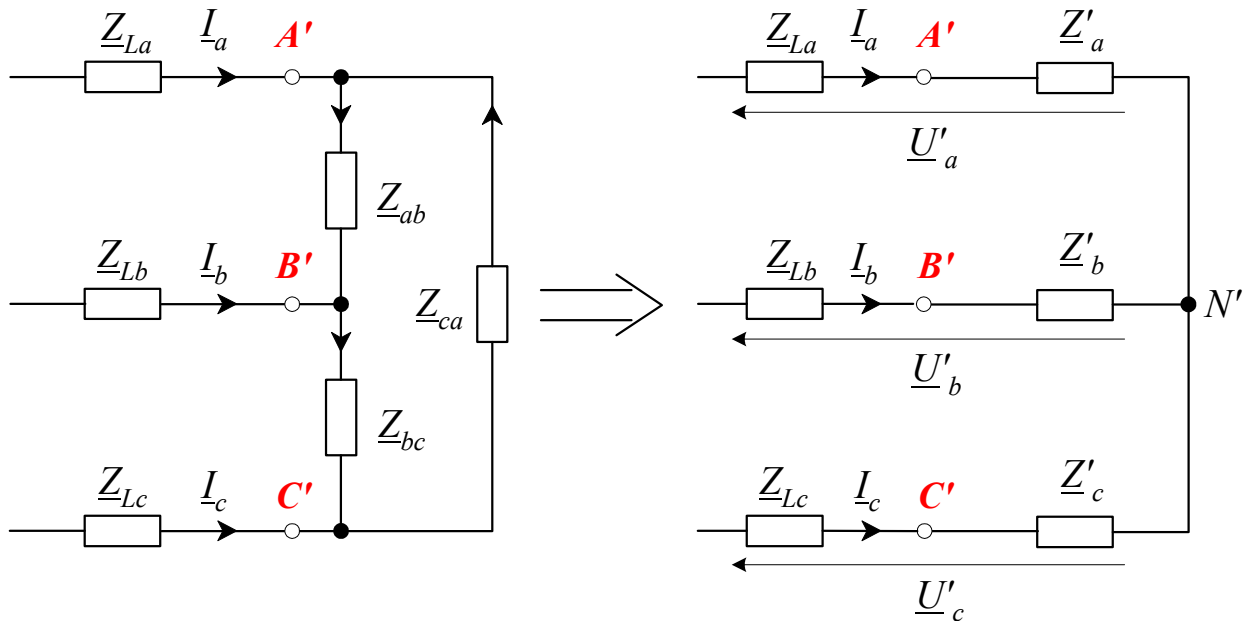
- odbiornik jest zasilany zawsze linią trójprzewodową ,
- prądy przewodowe stanowią różnice prądów fazowych

$$\underline{I}_a = \underline{I}_{ab} - \underline{I}_{ca}, \quad \underline{I}_b = \underline{I}_{bc} - \underline{I}_{ab}, \quad \underline{I}_c = \underline{I}_{ca} - \underline{I}_{bc} \quad (3.1)$$

- napięcia fazowe odbiornika równe są napięciom międzyfazowym.

Obliczanie prądów w obwodzie może być przeprowadzane w następujący sposób:

1. Zamieniamy trójkąt w równoważną gwiazdę (zal. (3.2))



Rys. 3.2

$$\underline{Z}'_a = \frac{\underline{Z}_{ab}\underline{Z}_{ca}}{\underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{bc} + \underline{Z}_{ca}}, \quad \underline{Z}'_b = \frac{\underline{Z}_{bc}\underline{Z}_{ab}}{\underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{bc} + \underline{Z}_{ca}}, \quad \underline{Z}'_c = \frac{\underline{Z}_{ca}\underline{Z}_{bc}}{\underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{bc} + \underline{Z}_{ca}} \quad (3.2)$$

2. Wykorzystując wzór (2.6) obliczamy zastępcze napięcie $\underline{U}_{N'N}$ ($\underline{Y}_N = 0$)

$$\underline{U}_{N'N} = \frac{\underline{Y}_a \underline{E}_a + \underline{Y}_b \underline{E}_b + \underline{Y}_c \underline{E}_c}{\underline{Y}_a + \underline{Y}_b + \underline{Y}_c} \quad (3.3)$$

gdzie:

$$\underline{Y}_a = \frac{1}{\underline{Z}'_a + \underline{Z}_{La}}, \quad \underline{Y}_b = \frac{1}{\underline{Z}'_b + \underline{Z}_{Lb}}, \quad \underline{Y}_c = \frac{1}{\underline{Z}'_c + \underline{Z}_{Lc}} \quad (3.4)$$

3. Prądy w fazach zastępczej gwiazdy odpowiadają prądom przewodowym układu z Rys. 3.1

$$\underline{I}_a = \underline{Y}_a \underline{U}'_a, \quad \underline{I}_b = \underline{Y}_b \underline{U}'_b, \quad \underline{I}_c = \underline{Y}_c \underline{U}'_c \quad (3.5)$$

gdzie:

$$\underline{U}'_a = \underline{E}_a - \underline{U}_{N'N}, \quad \underline{U}'_b = \underline{E}_b - \underline{U}_{N'N}, \quad \underline{U}'_c = \underline{E}_c - \underline{U}_{N'N} \quad (3.6)$$

4. Z odpowiednich "oczek" wyznaczamy napięcia fazowe odbiornika:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{ab} &= \underline{E}_a - \underline{E}_b + \underline{Z}_{Lb} \underline{I}_b - \underline{Z}_{La} \underline{I}_a \\ \underline{U}_{bc} &= \underline{E}_b - \underline{E}_c + \underline{Z}_{Lc} \underline{I}_c - \underline{Z}_{Lb} \underline{I}_b \\ \underline{U}_{ca} &= \underline{E}_c - \underline{E}_a + \underline{Z}_{La} \underline{I}_a - \underline{Z}_{Lc} \underline{I}_c \end{aligned} \quad (3.7)$$

5. Ostatecznie prądy fazowe wynoszą

$$\underline{I}_{ab} = \frac{\underline{U}_{ab}}{\underline{Z}_{ab}}, \quad \underline{I}_{bc} = \frac{\underline{U}_{bc}}{\underline{Z}_{bc}}, \quad \underline{I}_{ca} = \frac{\underline{U}_{ca}}{\underline{Z}_{ca}} \quad (3.8)$$

Jeżeli impedancje linii są równe zero, wówczas kolejność wyznaczania prądów ulega zmianie.

Bezpośrednio na podstawie napięć źródłowych obliczamy napięcia fazowe

$$\begin{aligned}\underline{U}_{ab} &= \underline{E}_{ab} = \underline{E}_a - \underline{E}_b \\ \underline{U}_{bc} &= \underline{E}_{bc} = \underline{E}_b - \underline{E}_c \\ \underline{U}_{ca} &= \underline{E}_{ca} = \underline{E}_c - \underline{E}_a\end{aligned}\quad (3.9)$$

Następnie wg (3.8) wyznaczamy prądy fazowe, na podstawie których (stosując (3.1)) otrzymujemy prądy przewodowe.

Uwaga.

Należy zaznaczyć, że o ile zawsze jest spełniony warunek $\underline{I}_a + \underline{I}_b + \underline{I}_c = 0$, to niekoniecznie musi zachodzić $\underline{I}_{ab} + \underline{I}_{bc} + \underline{I}_{ca} = 0$.

Podobnie w przypadku gwiazdy - dla napięć międzyfazowych zawsze obowiązuje $\underline{U}_{ab} + \underline{U}_{bc} + \underline{U}_{ca} = 0$, natomiast nie musi być $\underline{U}_a + \underline{U}_b + \underline{U}_c = 0$.

Z powyższej uwagi wynikają następujące wnioski dla odbiorników niesymetrycznych:

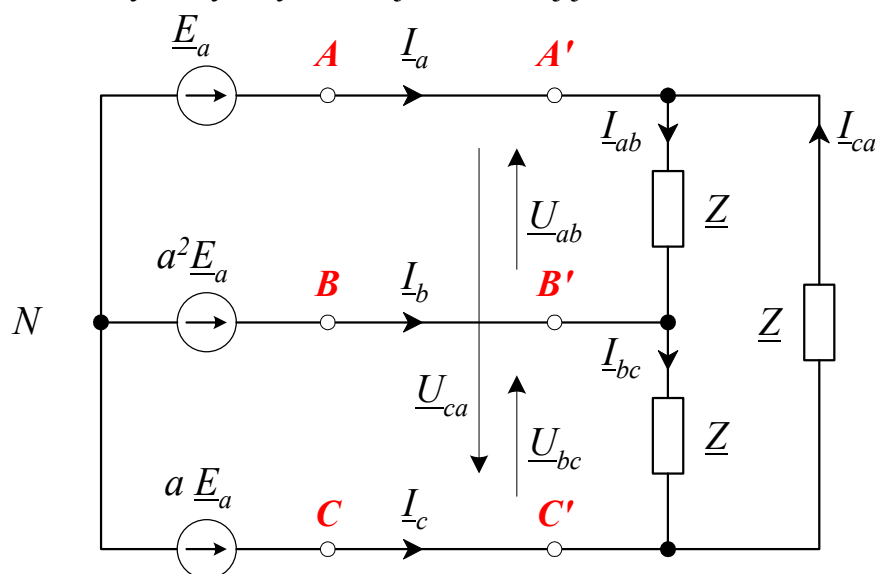
W przypadku gwiazdy, ogólnie nie można na podstawie napięć międzyfazowych "odtworzyć" napięć fazowych, natomiast dla trójkąta - prądów fazowych na podstawie prądów przewodowych.

3.2. Układ symetryczny.

Jeżeli układ odbiorczy jest symetryczny, tzn. gdy impedancje fazowe są sobie równe Rys. 3.3,

$$\underline{Z}_{ab} = \underline{Z}_{bc} = \underline{Z}_{ca} = \underline{Z} = Z e^{j\varphi} \quad (3.10)$$

to ze względu na równość modułów napięć źródłowych, prądy w fazach odbiornika oraz prądy przewodowe również będą posiadać jednakowe moduły, a wskaźy tych wielkości tworzyć będą odpowiedni układ symetryczny, o kolejności takiej jak źródło.



Rys. 3.3

Przyjmując zerową impedancję linii oraz symetryczne – zgodne zasilanie - możemy napisać:

$$\begin{aligned}\underline{U}_{ab} &= \underline{E}_{ab} = \underline{E}_a - \underline{E}_b = \sqrt{3} e^{j30^\circ} \underline{E}_a = \sqrt{3} E e^{j(\psi+30^\circ)} = U e^{j(\psi+30^\circ)} \\ \underline{U}_{bc} &= \underline{E}_{bc} = \underline{E}_b - \underline{E}_c = -j\sqrt{3} \underline{E}_a = a^2 \underline{U}_{ab} = \sqrt{3} E e^{j(\psi-90^\circ)} = U e^{j(\psi-90^\circ)} \\ \underline{U}_{ca} &= \underline{E}_{ca} = \underline{E}_c - \underline{E}_a = \sqrt{3} e^{j150^\circ} \underline{E}_a = a \underline{U}_{ab} = \sqrt{3} E e^{j(\psi+150^\circ)} = U e^{j(\psi+150^\circ)}\end{aligned}\quad (3.11)$$

gdzie: $\underline{E}_a = E e^{j\psi}$

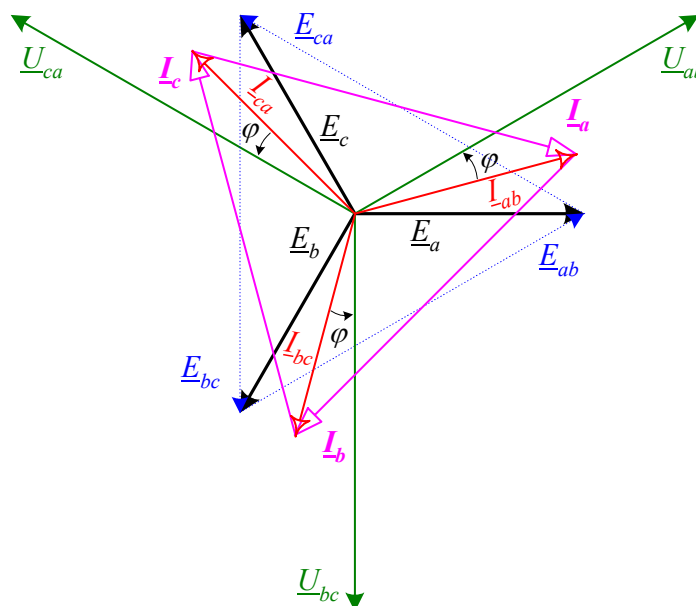
$$\begin{aligned}\underline{I}_{ab} &= \frac{\underline{U}_{ab}}{\underline{Z}} = \sqrt{3} \frac{E}{Z} e^{j(30^\circ + \psi - \varphi)} \\ \underline{I}_{bc} &= \frac{\underline{U}_{bc}}{\underline{Z}} = a^2 \underline{I}_{ab} = \sqrt{3} \frac{E}{Z} e^{j(\psi - 90^\circ - \varphi)} \\ \underline{I}_{ca} &= \frac{\underline{U}_{ca}}{\underline{Z}} = a \underline{I}_{ab} = \sqrt{3} \frac{E}{Z} e^{j(\psi + 150^\circ - \varphi)}\end{aligned}\quad (3.12)$$

$$\begin{aligned}\underline{I}_a &= \underline{I}_{ab} - \underline{I}_{ca} = (1 - a) \underline{I}_{ab} = \sqrt{3} \underline{I}_{ab} e^{-j30^\circ} = 3 \frac{E}{Z} e^{j(\psi - \varphi)} \\ \underline{I}_b &= \underline{I}_{bc} - \underline{I}_{ab} = (a^2 - 1) \underline{I}_{ab} = \sqrt{3} \underline{I}_{ab} e^{-j150^\circ} = 3 \frac{E}{Z} e^{j(\psi - 120^\circ - \varphi)} = a^2 \underline{I}_a \\ \underline{I}_c &= \underline{I}_{ca} - \underline{I}_{bc} = (a - a^2) \underline{I}_{ab} = \sqrt{3} \underline{I}_{ab} e^{j90^\circ} = 3 \frac{E}{Z} e^{j(\psi + 120^\circ - \varphi)} = a \underline{I}_a\end{aligned}\quad (3.13)$$

Z ostatnich zależności możemy stwierdzić, że w układzie symetrycznym z odbiornikiem połączonym w trójkąt, moduły prądów przewodowych są $\sqrt{3}$ razy większe od modułów prądów fazowych odbiornika.

$$I = \sqrt{3} I_f \quad (3.14)$$

Przykładowy wykres wskazowy, uwzględniający wszystkie powyższe zależności, dla odbiornika o charakterze indukcyjnym ($\varphi = 15^\circ$), przedstawiono na Rys. 3.4.



Rys. 3.4

4. Moc w układach trójfazowych

4.1. Zależności ogólne

Moc czynna pobierana przez odbiornik trójfazowy równa się sumie mocy dostarczonej do poszczególnych faz układu. Dla odbiornika niesymetrycznego można zapisać ją następująco:

$$\begin{aligned} \text{Dla gwiazdy:} \quad P &= P_a + P_b + P_c = \mathbf{Re} \underline{U}_a \underline{I}_a^* + \mathbf{Re} \underline{U}_b \underline{I}_b^* + \mathbf{Re} \underline{U}_c \underline{I}_c^* = \\ &= U_a I_a \cos \varphi_a + U_b I_b \cos \varphi_b + U_c I_c \cos \varphi_c \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} \text{Dla trójkąta:} \quad P &= P_{ab} + P_{bc} + P_{ca} = \mathbf{Re} \underline{U}_{ab} \underline{I}_{ab}^* + \mathbf{Re} \underline{U}_{bc} \underline{I}_{bc}^* + \mathbf{Re} \underline{U}_{ca} \underline{I}_{ca}^* = \\ &= U_{ab} I_{ab} \cos \varphi_{ab} + U_{bc} I_{bc} \cos \varphi_{bc} + U_{ca} I_{ca} \cos \varphi_{ca} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Analogiczna sytuacja zachodzi w przypadku mocy biernej oraz pozornej

$$\begin{aligned} Q &= Q_a + Q_b + Q_c = \mathbf{Im} \underline{U}_a \underline{I}_a^* + \mathbf{Im} \underline{U}_b \underline{I}_b^* + \mathbf{Im} \underline{U}_c \underline{I}_c^* = \\ &= U_a I_a \sin \varphi_a + U_b I_b \sin \varphi_b + U_c I_c \sin \varphi_c \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} Q &= Q_{ab} + Q_{bc} + Q_{ca} = \mathbf{Im} \underline{U}_{ab} \underline{I}_{ab}^* + \mathbf{Im} \underline{U}_{bc} \underline{I}_{bc}^* + \mathbf{Im} \underline{U}_{ca} \underline{I}_{ca}^* = \\ &= U_{ab} I_{ab} \sin \varphi_{ab} + U_{bc} I_{bc} \sin \varphi_{bc} + U_{ca} I_{ca} \sin \varphi_{ca} \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\underline{S} = P + jQ = \underline{S}_a + \underline{S}_b + \underline{S}_c = \underline{U}_a \underline{I}_a^* + \underline{U}_b \underline{I}_b^* + \underline{U}_c \underline{I}_c^* = U_a I_a e^{j\varphi_a} + U_b I_b e^{j\varphi_b} + U_c I_c e^{j\varphi_c} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \underline{S} &= P + jQ = \underline{S}_{ab} + \underline{S}_{bc} + \underline{S}_{ca} = \underline{U}_{ab} \underline{I}_{ab}^* + \underline{U}_{bc} \underline{I}_{bc}^* + \underline{U}_{ca} \underline{I}_{ca}^* = \\ &= U_{ab} I_{ab} e^{j\varphi_{ab}} + U_{bc} I_{bc} e^{j\varphi_{bc}} + U_{ca} I_{ca} e^{j\varphi_{ca}} \end{aligned} \quad (3.20)$$

W przypadku odbiornika symetrycznego równość modułów napięć oraz prądów fazowych pozwala na stosowanie uproszczonych zależności

$$\begin{aligned} P &= 3P_f = 3U_f I_f \cos \varphi = 3R I_f^2 \\ Q &= 3Q_f = 3U_f I_f \sin \varphi = 3X I_f^2 \\ \underline{S} &= 3\underline{S}_f = 3U_f I_f e^{j\varphi} = 3\underline{Z} I_f^2 \end{aligned} \quad (3.21)$$

Po dodatkowym uwzględnieniu związków między napięciami fazowymi i międzyfazowymi dla odbiornika połączonego w gwiazdę oraz prądami fazowymi i przewodowymi w przypadku odbiornika połączonego w trójkąt otrzymujemy uniwersalne wzory na poszczególne moce, wyrażone wyłącznie za pomocą napięcia międzyfazowego i prądu przewodowego.

- Dla gwiazdy:

$$U = \sqrt{3} U_f, \quad I = I_f \quad (3.22)$$

- Dla trójkąta:

$$I = \sqrt{3} I_f, \quad U = U_f \quad (3.23)$$

A zatem zależności (3.21) przyjmują postać

$$\begin{aligned} P &= 3U_f I_f \cos \varphi = \underbrace{3 \frac{U}{\sqrt{3}} I \cos \varphi}_{\text{dla gwiazdy}} = \underbrace{3U \frac{I}{\sqrt{3}} \cos \varphi}_{\text{dla trójkąta}} = \sqrt{3} U I \cos \varphi \\ Q &= \sqrt{3} U I \sin \varphi, \quad \underline{S} = \sqrt{3} U I e^{j\varphi} \end{aligned} \quad (3.24)$$

4.2. Wybrane układy do pomiaru mocy.

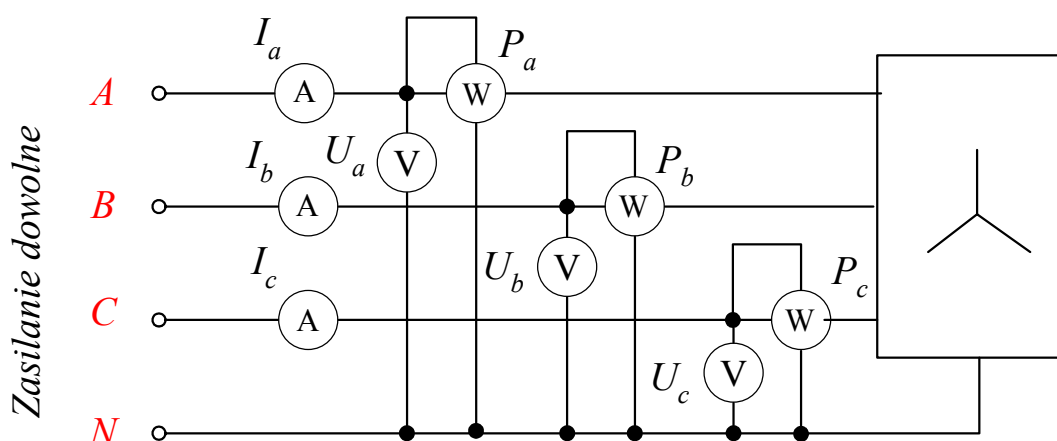
4.2.1. Pomiar mocy w układzie czteroprzewodowym.

a) Zasilanie dowolne, odbiornik niesymetryczny połączony w gwiazdę.

$$P = P_a + P_b + P_c \quad (4.1)$$

$$S = U_a I_a + U_b I_b + U_c I_c \quad (4.2)$$

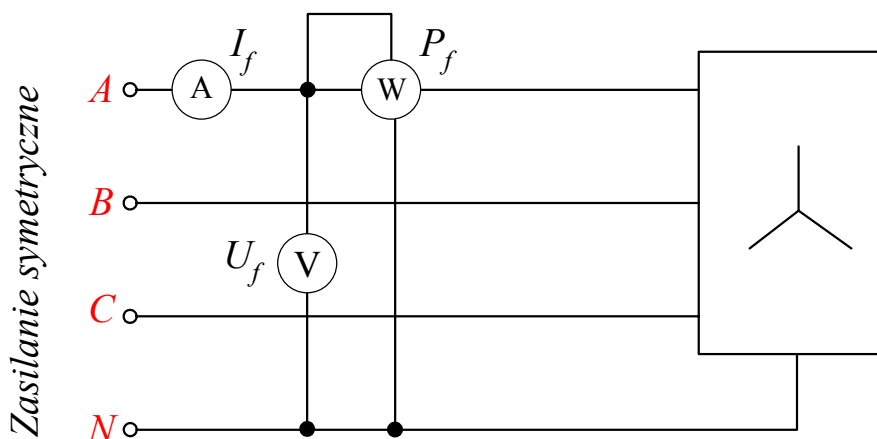
$$Q = \pm \sqrt{S^2 - P^2} \quad (4.3)$$



Rys. 4.1 Układ do pomiaru mocy za pomocą trzech watomierzy

b) Zasilanie symetryczne, odbiornik symetryczny połączony w gwiazdę, z punktem neutralnym.

$$P = 3P_f, \quad S = 3U_f I_f, \quad Q = \pm \sqrt{S^2 - P^2} \quad (4.4)$$

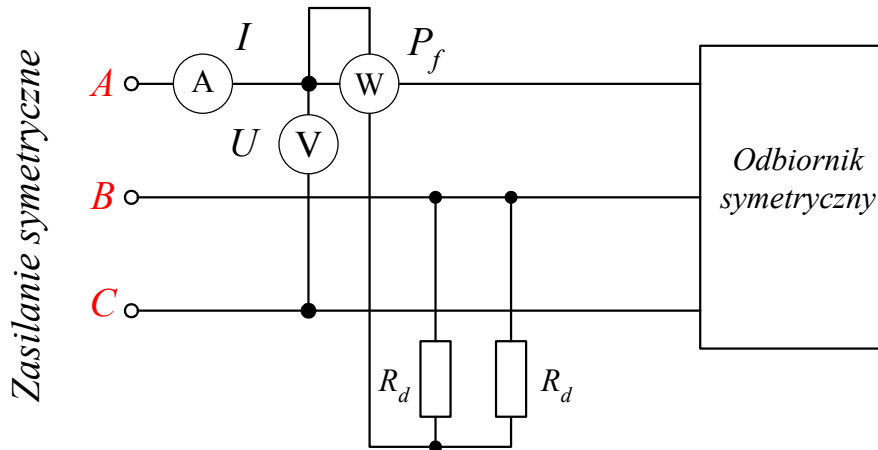


Rys. 4.2 Układ do pomiaru mocy za pomocą jednego watomierza

4.2.2. Pomiar mocy w układach trójprzewodowych

a) Zasilanie symetryczne, odbiornik symetryczny – dowolne połączenie odbiornika.

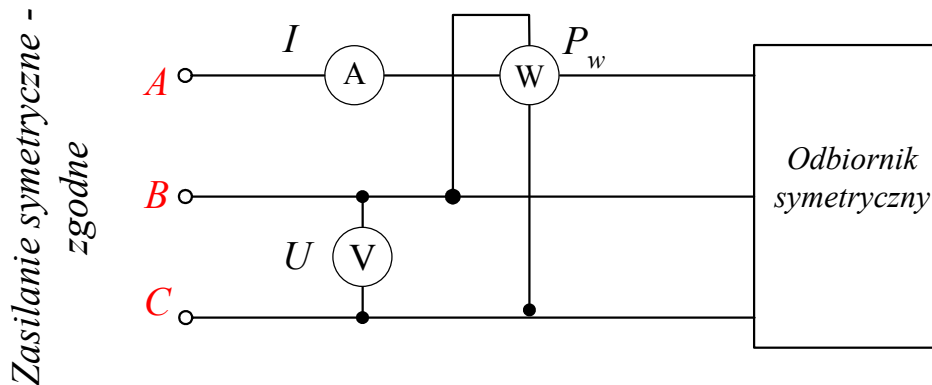
$$P = 3P_f, \quad S = \sqrt{3}UI, \quad Q = \pm\sqrt{S^2 - P^2} \quad (4.5)$$



Rys. 4.3 Układ z tzw. sztucznym punktem zerowym.

b) Układ do bezpośredniego pomiaru mocy biernej.

$$Q = \sqrt{3}P_w \quad (4.6)$$



Rys. 4.4

Wzór (4.6) wykażemy dla przypadku odbiornika połączonego w gwiazdę

$$\begin{aligned} P_w &= \operatorname{Re} \underline{U}_w \underline{I}_w^* = \operatorname{Re} \underline{U}_{bc} \underline{I}_a^* = \operatorname{Re} \left\{ -j\sqrt{3} \underline{U}_a \underline{I}_a^* \right\} = -\sqrt{3} \operatorname{Re} \left\{ jU_a e^{j\psi_{u_a}} I_a e^{-j\psi_{i_a}} \right\} = \\ &= -\sqrt{3} U_a I_a \operatorname{Re} \left\{ j e^{j(\psi_{u_a} - \psi_{i_a})} \right\} = -\sqrt{3} U_a I_a \operatorname{Re} \left\{ j e^{j\varphi} \right\} = -\sqrt{3} U_a I_a \operatorname{Re} \left\{ j \cos \varphi \right\} = \\ &= -\sqrt{3} U_a I_a \operatorname{Re} \left\{ j (\cos \varphi + j \sin \varphi) \right\} = -\sqrt{3} U_a I_a \operatorname{Re} \left\{ j \cos \varphi - \sin \varphi \right\} = \sqrt{3} U_a I_a \sin \varphi \end{aligned} \quad (4.7)$$

A zatem

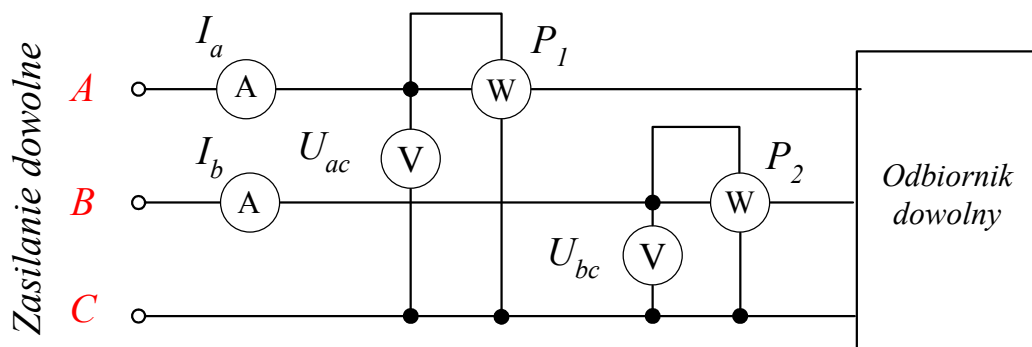
$$P_w = \sqrt{3} Q_f = \sqrt{3} \frac{Q}{3} = \frac{Q}{\sqrt{3}} \quad (4.8)$$

Stąd otrzymujemy (4.6).

c) Zasilanie dowolne, odbiornik symetryczny lub niesymetryczny, połączenie odbiornika dowolne.

Niniejsza metoda jest podstawową metodą pomiaru mocy czynnej w układach trójfazowych zasilanych linią trójprzewodową. Nazywa się ona **metodą Arona** lub metodą dwóch watomierzy (Rys. 4.5).

Jedynym warunkiem stosowania tej metody jest zasilanie trójprzewodowe, tzn. $I_a + I_b + I_c = 0$.



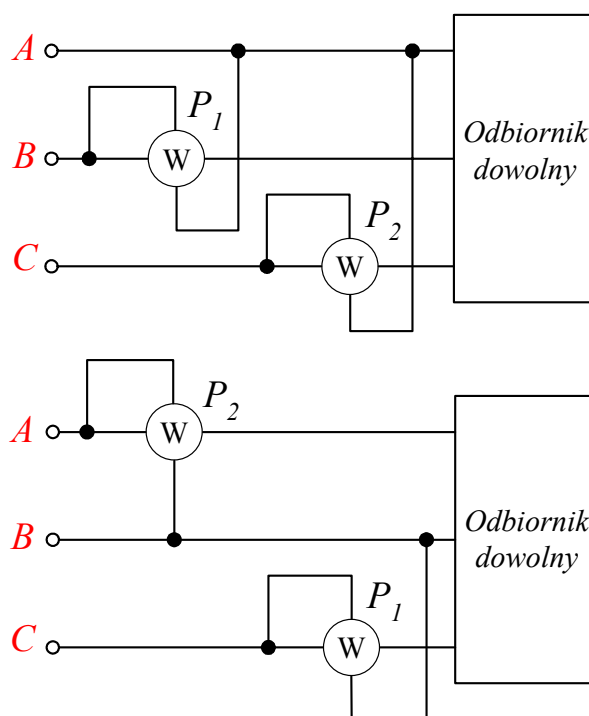
Rys. 4.5 Układ podstawowy metody Arona

Według tej metody moc czynna pobierana przez układ równa jest sumie wskazań obu watomierzy.

$$P = P_1 + P_2 \quad (4.9)$$

Jeżeli jeden z watomierzy "próbuję" wychylić się w niewłaściwą stronę, to należy zamienić kolejność dowolnych zacisków prądowych bądź napięciowych tego watomierza, a jego wskazanie uwzględnić w sumie (4.9) ze znakiem "minus".

Poniżej na Rys. 4.6 przedstawiono inne - równoważne sposoby włączania watomierzy.



Rys. 4.6 Równoważne sposoby włączania watomierzy w metodzie Arona.

Wzór (4.9) udowodnimy zakładając, że odbiornik połączony jest w gwiazdę:

$$\begin{aligned}
 P_1 + P_2 &= \mathbf{Re} \left\{ \underline{U}_{ac} \underline{I}_a^* \right\} + \mathbf{Re} \left\{ \underline{U}_{bc} \underline{I}_b^* \right\} = \mathbf{Re} \left\{ (\underline{U}_a - \underline{U}_c) \underline{I}_a^* + (\underline{U}_b - \underline{U}_c) \underline{I}_b^* \right\} = \\
 &= \mathbf{Re} \left\{ \underline{U}_a \underline{I}_a^* + \underline{U}_b \underline{I}_b^* - \underline{U}_c (\underline{I}_a^* + \underline{I}_b^*) \right\} = \mathbf{Re} \left\{ \underline{U}_a \underline{I}_a^* + \underline{U}_b \underline{I}_b^* - \underline{U}_c (-\underline{I}_c^*) \right\} = \\
 &= \mathbf{Re} \left\{ \underline{U}_a \underline{I}_a^* + \underline{U}_b \underline{I}_b^* + \underline{U}_c \underline{I}_c^* \right\} = P_a + P_b + P_c = P
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Jeżeli układ jest symetryczny, to za pomocą metody dwóch watomierzy można mierzyć również moc bierną. Przyjmując tak jak poprzednio, że odbiornik połączony jest w gwiazdę, a zasilanie jest symetryczne – zgodne, obliczymy różnicę wskazań watomierzy

$$\begin{aligned}
 P_1 - P_2 &= \mathbf{Re} \left\{ \underline{U}_{ac} \underline{I}_a^* \right\} - \mathbf{Re} \left\{ \underline{U}_{bc} \underline{I}_b^* \right\} = \mathbf{Re} \left\{ (1-a) \underline{U}_a \underline{I}_a^* - (a^2 - a) \underline{U}_a (a^2 \underline{I}_a)^* \right\} = \\
 &= \mathbf{Re} \left\{ (1-a) \underline{U}_a \underline{I}_a^* - (a^2 - a) \underline{U}_a a \underline{I}_a^* \right\} = \mathbf{Re} \left\{ (1-a) \underline{U}_a \underline{I}_a^* - (1-a^2) \underline{U}_a \underline{I}_a^* \right\} = \\
 &= \mathbf{Re} \left\{ (a^2 - a) \underline{U}_a \underline{I}_a^* \right\} = \mathbf{Re} \left\{ -j\sqrt{3} U_a I_a e^{j(\psi_{u_a} - \psi_{i_a})} \right\} = \sqrt{3} U_a I_a \mathbf{Re} \left\{ -j e^{j\varphi} \right\} = \\
 &= \sqrt{3} U_a I_a \mathbf{Re} \left\{ -j (\cos \varphi + j \sin \varphi) \right\} = \sqrt{3} U_a I_a \sin \varphi = \sqrt{3} Q_a = \sqrt{3} Q_f = \frac{1}{\sqrt{3}} Q
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Stąd, ostatecznie całkowita moc bierna odbiornika symetrycznego wynosi

$$Q = \sqrt{3} (P_1 - P_2) \tag{4.12}$$

Dla odbiornika symetrycznego można bezpośrednio wyrazić wskazania watomierzy w funkcji argumentu impedancji. Zależności te pozwolą określić zakres kąta fazowego, przy których wskazania poszczególnych watomierzy będą ujemne.

Zapiszmy wskazania watomierzy w nieco innej postaci:

$$P_1 = \mathbf{Re} \left\{ \underline{U}_{ac} \underline{I}_a^* \right\} = U_{ac} I_a \cos \varphi_1, \quad P_2 = \mathbf{Re} \left\{ \underline{U}_{bc} \underline{I}_b^* \right\} = U_{bc} I_b \cos \varphi_2 \tag{4.13}$$

Na podstawie wcześniejszych rozważań :

$$\varphi_1 = \psi_{u_{ac}} - \psi_{i_a} = \psi_{u_a} - 30^\circ - \psi_{i_a} = \varphi - 30^\circ \tag{4.14}$$

$$\varphi_2 = \psi_{u_{bc}} - \psi_{i_b} = \psi_{u_b} + 30^\circ - \psi_{i_b} = \varphi + 30^\circ$$

$$U_{ac} = U_{bc} = U = \sqrt{3} U_f, \quad I_a = I_b = I_f$$

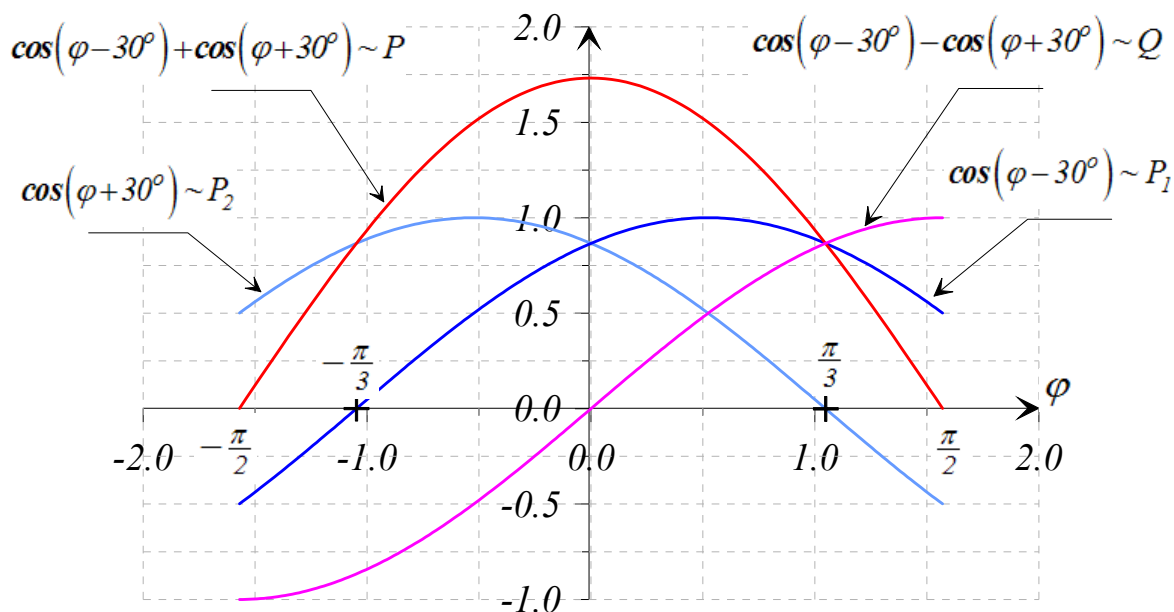
Stąd otrzymujemy

$$P_1 = \sqrt{3} U_f I_f \cos(\varphi - 30^\circ), \quad P_2 = \sqrt{3} U_f I_f \cos(\varphi + 30^\circ) \tag{4.15}$$

Uwzględniając zatem zależność (4.15) w (4.9) i (4.12) można napisać

$$\begin{aligned}
 P &= \sqrt{3} U_f I_f \left[\cos(\varphi - 30^\circ) + \cos(\varphi + 30^\circ) \right] \\
 Q &= 3 U_f I_f \left[\cos(\varphi - 30^\circ) - \cos(\varphi + 30^\circ) \right]
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

Wyznaczone zależności zostały zilustrowane na poniższym wykresie



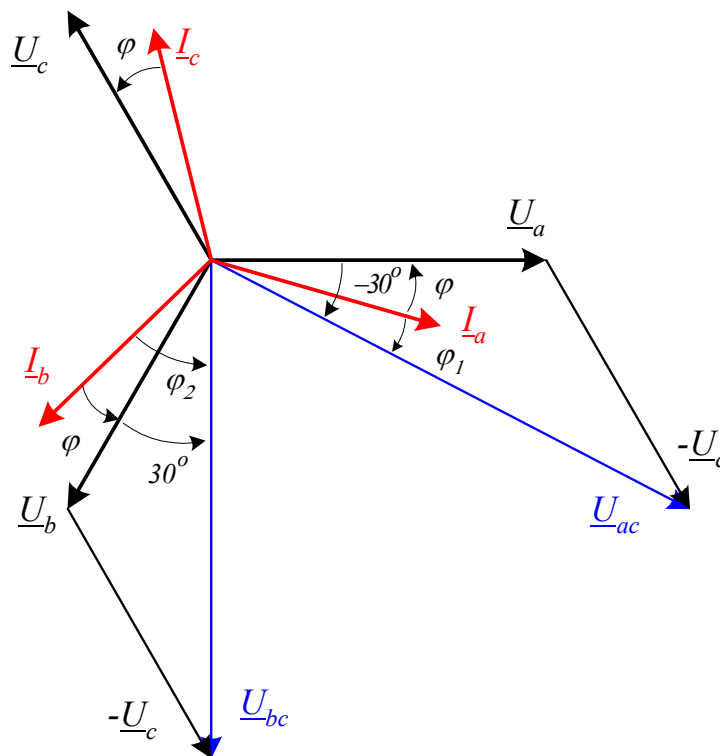
Rys. 4.7 Wykresy zależności wyrażen odpowiadających wskazaniom poszczególnych watomierzy oraz ich sumie i różnicy

Można zauważyć, że watomierz P_1 będzie wskazywał wartość ujemną dla odbiornika o charakterze pojemnościowym, gdy

$$\varphi_1 = \varphi - 30^\circ < -90^\circ \Rightarrow \varphi < -60^\circ$$

Analogicznie, watomierz P_2 dla odbiornika o charakterze indukcyjnym, jeżeli

$$\varphi_2 = \varphi + 30^\circ > 90^\circ \Rightarrow \varphi > 60^\circ$$

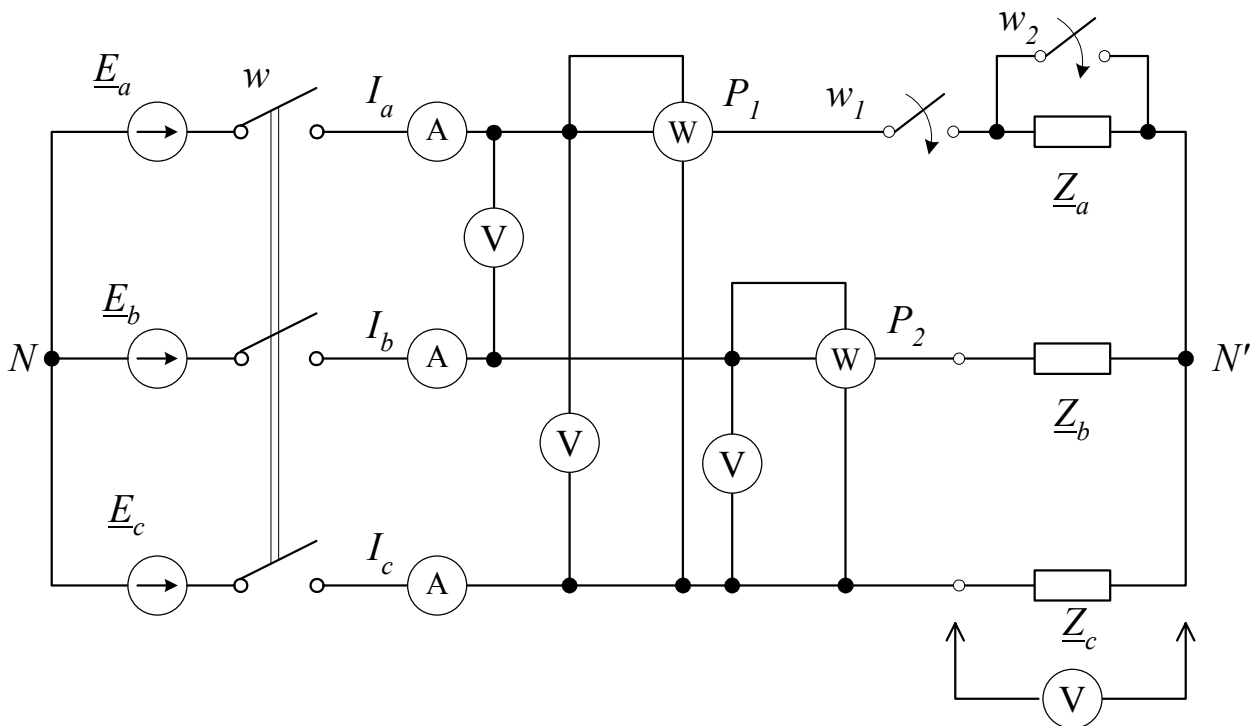


Rys. 4.8 Wykres wskazowy układu trójfazowego - symetrycznego, przy obciążeniu indukcyjnym

5. Opis badanych układów

5.1. Odbiornika połączony w gwiazdę.

Schemat układu pomiarowego jest przedstawiony na Rys. 5.1. Układ jest zasilany z sieci 400/230 V przez autotransformator trójfazowy. Układ odbiorczy stanowią trzy odbiorniki o charakterze rezystancyjnym bądź pojemnościowym połączone w gwiazdę.



Rys. 5.1 Schemat badanego układu trójfazowego z odbiornikiem połączonym w gwiazdę

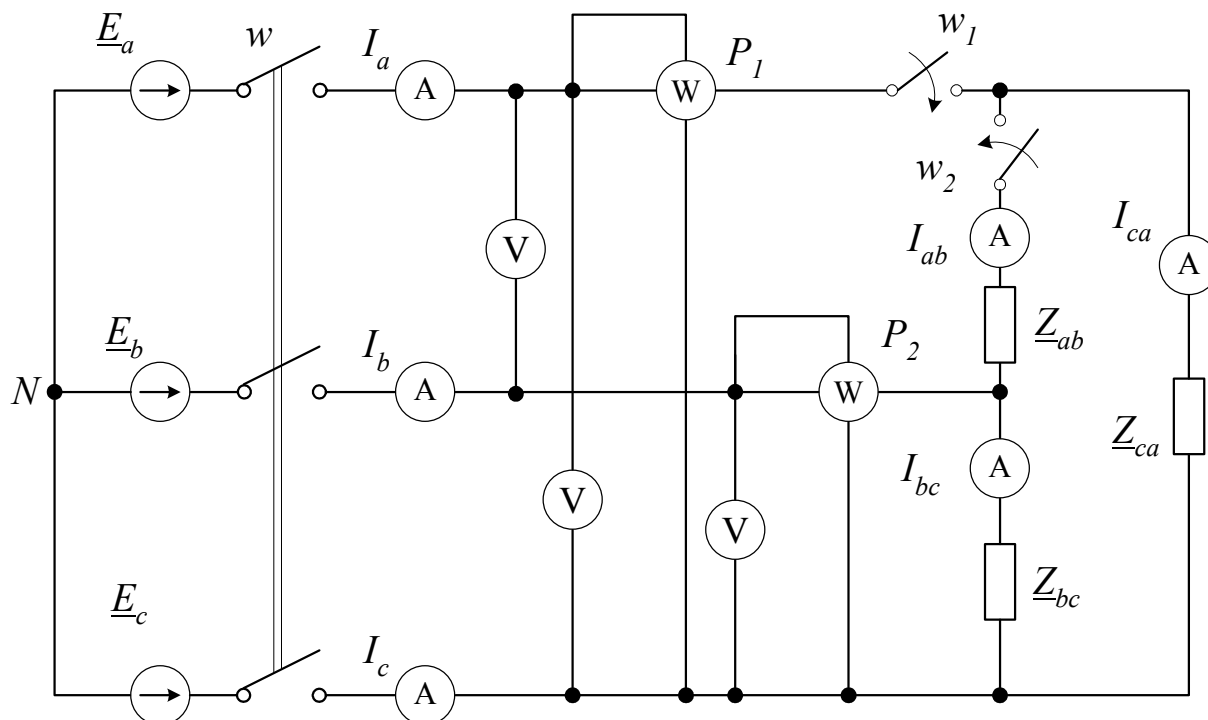
Badanie układu przeprowadza się dla następujących warunków pracy:

- Odbiornik symetryczny (klucz w_1 – zamknięty, w_2 – otwarty), $\underline{Z}_a = \underline{Z}_b = \underline{Z}_c = R$,
- Nastawienie różnych wartości rezystancji gwiazdy (klucz w_1 – zamknięty, w_2 – otwarty), $\underline{Z}_b = \underline{Z}_c = R$, $\underline{Z}_a = \frac{1}{2}R$,
- Przerwę w jednej z faz układu (klucze w_1 otwarty), $\underline{Z}_b = \underline{Z}_c = R$, $\underline{Z}_a = \infty$,
- Zwarcie jednej fazy odbiornika (klucze w_1 i w_2 – zamknięte), $\underline{Z}_b = \underline{Z}_c = R$, $\underline{Z}_a = 0$,
- Układ niesymetryczny – $\underline{Z}_b = \underline{Z}_c = R$, $\underline{Z}_a = -jX_c$, $X_c = R$ (Rys. 2.4).

Pomiarowi podlegają prądy w przewodach zasilających, moc odbiornika (metoda dwóch watomierzy) i napięcia w różnych częściach układu (fazowe odbiornika, międzyfazowe oraz napięcie między punktami neutralnymi źródła i odbiornika).

5.2. Odbiornik połączony w trójkąt.

Schemat układu jest przedstawiony na Rys. 5.2. Układ odbiorczy stanowią trzy odbiorniki o charakterze rezystancyjnym połączone w trójkąt.



Rys. 5.2 Schemat badanego układu trójfazowego z odbiornikiem połączonym w trójkąt

Niesymetrię układu odbiorczego osiąga się przez:

- Ustawienie różnych wartości rezystancji trójkąta, np. $Z_{bc} = Z_{ca} = R$, $Z_{ab} = \frac{1}{2}R$,
- Przerwę w jednej z faz układu trójkątowego (klucz w_1 – zamknięty, w_2 – otwarty),
- Przerwę w przewodzie zasilającym trójkąt (klucz w_1 – otwarty, w_2 – zamknięty).

6. Program ćwiczenia

- Zmontować układ pomiarowy według schematu na Rys. 5.1.
- Nastawić na trzech danych rezystorach suwakowych jednakowe wartości rezystancji R według wskazań prowadzącego ćwiczenia. Zmierzyć i zanotować wartości rezystancji.
- Zamknąć wyłącznik w i zmierzyć kolejno wszystkie napięcia w układzie. Odczytać wskazania amperomierzy i watomierzy. Zmierzone wartości wpisać do tabeli 1a.
- Wykonać podobne jak w p.6.3 pomiary w przypadkach, gdy:
 - Rezystancja fazy A została zmniejszona do ok. $0.5 R$,
 - Przerwa w fazie A - klucz w_1 otwarty, w tym przypadku napięcie na odbiorniku tej fazy powinno być zmierzone pomiędzy punktem N' a zaciskiem wyłącznika w_1 po stronie zasilania,
 - Stan zwarcia fazy A odbiornika - klucze w_1 oraz w_2 zamknięte.
- W miejsce rezystora w fazie A włączyć kondensator, którego reaktancja jest równa jednakowym rezystancjom w fazach B i C. Wykonać pomiary analogicznie jak w p.6.3.

6. Zmontować układ połączeń według schematu na Rys. 5.2.
7. Wykonać pomiary napięć, prądów i mocy:
 - a) Podczas symetrycznej pracy układu - jednakowe wartości impedancji (rezystancji) odbiornika $\underline{Z}_{ab} = \underline{Z}_{bc} = \underline{Z}_{ca} = R$, (klucze w_1 i w_2 zamknięte),
 - b) Przy przerwie w jednej z gałęzi trójkąta - klucz w_2 otwarty,
 - c) Przy przerwie w przewodzie zasilającym - klucz w_1 otwarty, w_2 zamknięty,
 - d) Nastawić różne wartości rezystancji odbiornika: np. $\underline{Z}_{ab} \approx 0.5R$, $\underline{Z}_{bc} \approx 0.75R$, $\underline{Z}_{ca} = R$.Wyniki pomiarów wpisać do tabeli 2a, według podanego wzoru.

7. Opracowanie sprawozdania

1. Przedstawić krótko przedmiot i zakres badań, schematy układów pomiarowych.
2. Zanotować wartość rezystancji i reaktancji elementów badanego obwodu.
3. Na podstawie przeprowadzonych pomiarów w punktach 6.3 i 6.4 a-c oraz 6.5 wykonać wykresy wskazowe na płaszczyźnie zespolonej przyjmując symetryczne zasilanie. Wyznaczyć wykreślnie położenie topograficzne punktu N' oraz wykreślić napięcia fazowe odbiornika.
4. Dla przyjętego układu symetrycznego napięć fazowych i danych impedancji fazowych odbiorników, dla wszystkich stanów pracy układu, obliczyć wartości zespolone napięcia $\underline{U}_{N'N}$, napięć fazowych i prądów. Wyniki obliczeń wpisać kolejno do wierszy tabeli 1b. Porównać obliczone wartości $\underline{U}_{N'N}$ z wartościami otrzymanymi metodą wykreślną. Porównać obliczone wartości skuteczne prądów z wynikami pomiarów. Nanieść wskaźy prądów na wykresy wykonane w p.7.3.
5. Dla przyjętego symetrycznego układu zasilającego napisać wartości zespolone napięć międzyfazowych, na które włączone są cewki napięciowe watomierzy i obliczone wartości zespolone prądów. Obliczyć moce: $\underline{S}_1 = \underline{U}_{ac} \underline{I}_a^*$; $\underline{S}_2 = \underline{U}_{bc} \underline{I}_b^*$ oraz moc czynną $P_{obl} = \text{Re}(\underline{S}_1 + \underline{S}_2)$. Porównać obliczoną wartość P_{obl} z sumą wskazań watomierzy zanotowanych w tabeli 1a. Obliczenia wykonać dla wszystkich stanów pracy układu.
6. Wykonać analogiczne czynności dla układu z odbiornikiem połączonym w trójkąt, dla wszystkich stanów pracy układu. Obliczone wartości wpisywać do tabeli 2b.

8. Pytania kontrolne

1. Przedstawić metodę obliczania prądów w układzie trójfazowym przy symetrycznym układzie odbiorników połączonych w gwiazdę (trójkąt).
2. Przedstawić metodę obliczenia prądów w układzie trójfazowym przy niesymetrycznym układzie odbiorników połączonych w gwiazdę (trójkąt).
3. Jak obliczamy napięcie $\underline{U}_{N'N}$ między punktami neutralnymi układu zasilającego i układu odbiorczego przy połączeniu w gwiazdę ?
4. Jak należy wykonać pomiar napięcia fazowego w fazie, w której występuje przerwa ?
5. Przedstawić sposób obliczenia prądu podczas zwarcia jednej z faz układu trójfazowego, przy połączeniu odbiorników w gwiazdę.
6. Jak można przy danym układzie wskazów napięć zasilających symetrycznych międzyfazowych wyznaczyć potencjał punktu neutralnego N' układu odbiorników niesymetrycznych połączonych w gwiazdę, znając wartości skuteczne ich napięć fazowych ?
7. Narysować układ do pomiaru mocy czynnej w układach trójfazowych metodą dwóch watomierzy .
8. Przedstawić warunki stosowania metody dwóch watomierzy dla układów trójfazowych niesymetrycznych.
9. Udowodnić, że w metodzie dwóch watomierzy moc czynna układu trójfazowego równa się sumie wskazań watomierzy (dla gwiazdy i trójkąta).
10. Dla jakich odbiorników kolejność faz ma podstawowe znaczenie, tak że włączenie napięcia o niewłaściwej kolejności może zakłócić pracę urządzeń.
11. Omówić działanie układu do kontroli kolejności faz. Jak zmieni się procedura wyznaczania kolejności faz jeżeli kondensator zastąpimy cewką indukcyjną (dławikiem) ?

9. LITERATURA

S. Bolkowski: *Teoria obwodów elektrycznych*. WNT, Warszawa 1995.

Sprawozdanie powinno zawierać:

1. Wypełnioną tabelkę (wzór):

Politechnika Wroclawska	Nazwiska i imiona osób danej grupy ćwiczeniowej (wykonujących ćwiczenie)	Rok.
Instytut Podstaw Elektrotechniki i Elektrotechnologii		Grupa. (dzień tyg.) n/p
		Grupa lab.
<i>LABORATORIUM PODSTAW ELEKTROTECHNIKI</i>		
Data ćwiczenia:	Temat:	Ocena:
Nr ćwiczenia:		

2. Cel ćwiczenia
3. Aktualny schemat pomiarowy badanego układu
4. Tabele pomiarowe
5. Dla każdej z tabel przykład obliczeniowy dla wybranego wiersza tabeli
6. Wykresy wskazowe napięć i prądów
7. Wnioski, uwagi, spostrzeżenia

UWAGA:

Zarówno schemat układu pomiarowego, jak i realizacja poszczególnych punktów ćwiczenia może ulec zmianie na życzenie prowadzącego ćwiczenie.

Laboratorium Elektrotechniki Teoretycznej

Teoria Obwodów 2

ELR021303L

Temat ćwiczenia:

**Badanie równoległego
i szeregowo-równoległego
układu RLC przy wymuszeniu
sinusoidalnym**

Instytut Podstaw Elektrotechniki i Elektrotechnologii -



Zakład Elektrotechniki Teoretycznej



1. Cel i zakres ćwiczenia.

Badanie zjawisk występujących w obwodzie złożonym z równoległe i szeregowo-równoległe połączonych elementów RLC zasilanych ze źródła napięcia sinusoidalnie zmiennego o regulowanej częstotliwości. Wyznaczenie rozplywu prądów i spadków napięć na poszczególnych elementach obwodu dla różnych częstotliwości sygnału zasilającego. Wyznaczanie admitancji wejściowej badanych obwodów funkcji częstotliwości sygnału zasilającego.

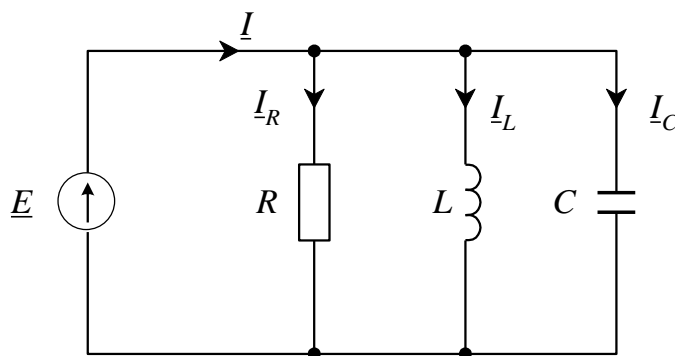
2. Wstęp teoretyczny.

2.1. Równoległy obwód RLC

Obwód przedstawiony na rys.1 złożony jest z równoległe połączonych elementów RLC. W obwodzie tym płynie prąd o wartości zespolonej

$$\underline{I} = \underline{Y} \underline{E} \quad (1)$$

gdzie \underline{Y} jest admitancją obwodu, a \underline{E} jest napięciem zasilającym.

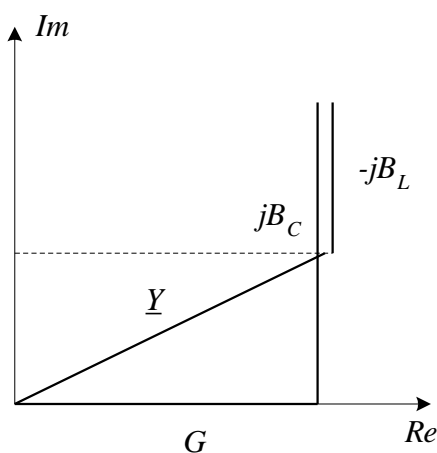


Rys.1. Równoległy obwód RLC

Moduł admitancji tego obwodu jest opisany równaniem:

$$Y = \sqrt{G^2 + (B_C - B_L)^2} \quad (2)$$

gdzie G jest to przewodnością obwodu, B_L oznacza susceptancję indukcyjną a B_C susceptancję pojemnościową tego obwodu. (rys. 2).



Rys. 2 Wykres admitancji

Wypadkowa susceptancja obwodu B jest równa różnicy susceptancji elementów magazynujących energię:

$$B = B_C - B_L \quad (3)$$

gdzie $B_C = \omega C$, $B_L = \frac{1}{\omega L}$, $\omega = 2\pi f$

Korzystając z prądowego prawa Kirchhoffa całkowity prąd pobierany ze źródła można wyrazić jako sumę prądów płynących w poszczególnych gałęziach obwodu:

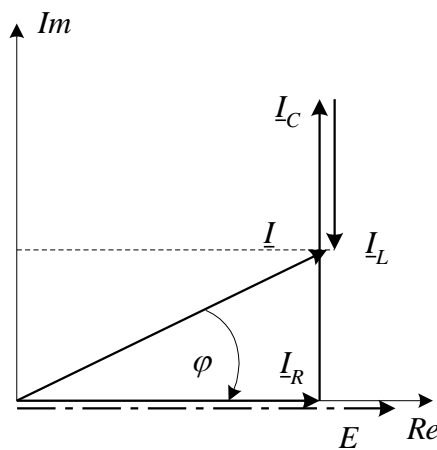
$$\underline{I} = \underline{I}_R + \underline{I}_C + \underline{I}_L \quad (4)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} I_R &= G E \\ I_C &= B_C E = \omega C E \\ I_L &= B_L E = \frac{1}{\omega L} E \end{aligned} \quad (5)$$

Wykres wskazowy prądów przedstawiono na rys. 3. Kąt przesunięcia fazowego ϕ pomiędzy prądem pobieranym ze źródła a napięciem zasilającym obliczymy z zależności:

$$\phi = -\arctg \frac{B}{G} \quad (6)$$



Rys. 3 Wykres wskazowy prądów

Dla pewnej częstotliwości f_0 zwanej częstotliwością rezonansową susceptancja całego obwodu B jest równa zero:

$$B = B_C - B_L = 0 \quad (7)$$

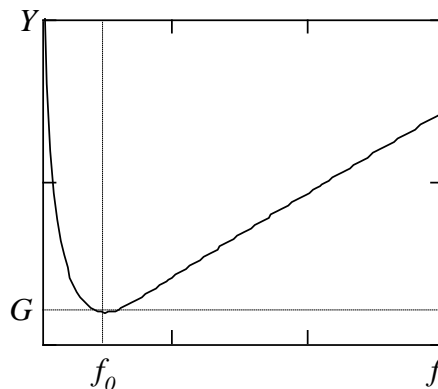
Częstotliwość rezonansową obliczamy ze wzoru:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (8)$$

Należy zauważyć, że dla idealnych elementów, częstotliwość rezonansowa obwodu równoległego jest taka sama jak częstotliwość rezonansowa obwodu szeregowego.

Krzywą zmian admityncji obwodu w funkcji częstotliwości przedstawiono na rys.4. Wartość admityncji obwodu w stanie rezonansu przyjmuje wartość minimalną i jest równa konduktancji tego obwodu:

$$\underline{Y} = G = \frac{I}{R} \quad (9)$$

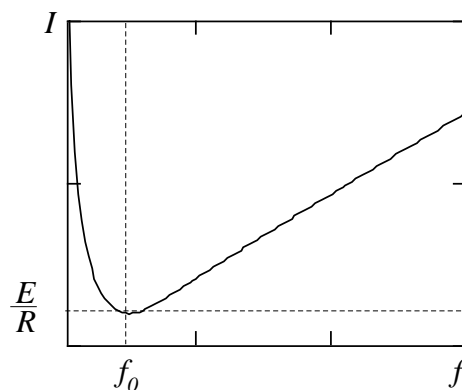


Rys. 4. Wykres admityncji w funkcji częstotliwości.

W konsekwencji moduł prądu płynącego w obwodzie w stanie rezonansu jest równy:

$$I = G E = \frac{1}{R} E \quad (10)$$

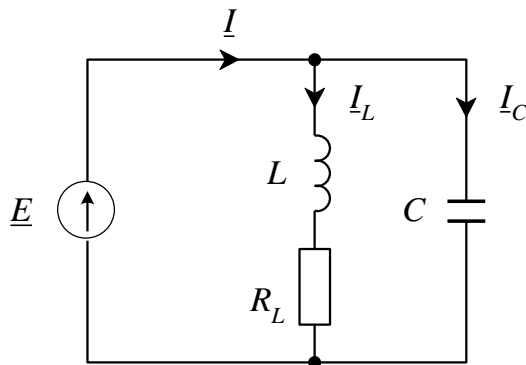
Na rys. 5 przedstawiono wykres zmian prądu w funkcji częstotliwości napięcia zasilającego. Wartość prądu w rezonansie jest zależna od wartości konduktancji G .



Rys 5. Charakterystyka rezonansowa

Należy zdawać sobie sprawę z faktu, że w obwodzie z równoległe połączonymi elementami LC wartości prądów płynących w gałęziach zawierających elementy magazynujące energię mogą być znacznie większe niż prąd pobierany ze źródła (przetężenie).

Rozpatrzmy przedstawiony na rys. 6 rzeczywisty obwód rezonansowy złożony z bezstratnego kondensatora o pojemności C połączonego równoległe z rzeczywistą cewką o indukcyjności L i rezystancji R_L .



Rys. 6. Układ równoległy z rzeczywistą cewką indukcyjną.

Korzystając z prądowego prawa Kirchhoffa całkowity prąd pobierany ze źródła jest równy:

$$\underline{I} = \underline{I}_C + \underline{I}_L \quad (11)$$

gdzie:

$$\underline{I}_C = \underline{Y}_C \underline{E} = jB_C \underline{E} \quad (12)$$

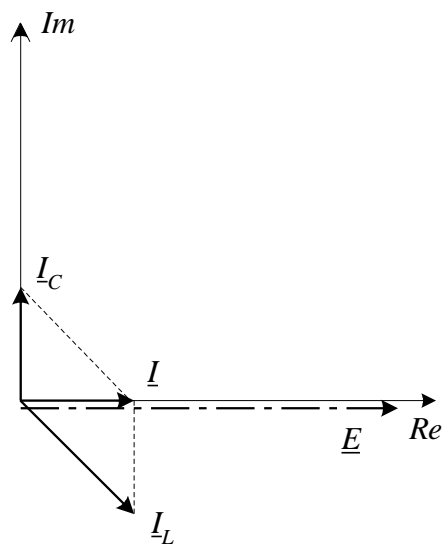
$$\underline{I}_L = \underline{Y}_L \underline{E} = \frac{j}{R_L + jX_L} \underline{E} \quad (13)$$

Zatem prąd pobierany ze źródła można obliczyć z równania

$$\underline{I} = \frac{R_L}{R_L^2 + X_L^2} \underline{E} + j \left(B_C - \frac{X_L}{R_L^2 + X_L^2} \right) \underline{E} \quad (14)$$

$$\underline{I} = G' \underline{E} + jB' \underline{E} \quad (15)$$

Na rys. 7 przedstawiono wykres wskazowy prądów w rozpatrywanym obwodzie w stanie rezonansu.



Rys. 7. Wykres wskazowy prądów dla obwodu z rys. 6

Jak widać na wykresie prąd \underline{I} jest w fazie z napięciem \underline{E} , gdyż całkowita susceptancja obwodu jest równa zero.

$$\frac{I}{X_C} - \frac{X_L}{R_L^2 + X_L^2} = 0 \quad (16)$$

Po przekształceniu otrzymujemy następujący warunek na rezonans

$$X_C = X_L + \frac{R_L^2}{X_L} \quad (17)$$

W konsekwencji w rozpatrywanym obwodzie wystąpi rezonans, gdy częstotliwość źródła będzie równa:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R_L}{L}\right)^2} \quad (18)$$

Jak wynika z powyższej zależności, wzrost rezystancji cewki powoduje obniżenie wartości częstotliwości rezonansowej. Gdy rezystancja cewki dąży do zera to wartość częstotliwości rezonansowej zbliża się do częstotliwości rezonansowej obwodu złożonego z elementów czysto reaktancyjnych.

Rezystancję rezonansową obwodu równoległego określa się jako iloraz napięcia na zaciskach obwodu do prądu pobieranego przez obwód w chwili rezonansu.

$$R_0 = \frac{E}{I_0} \quad (19)$$

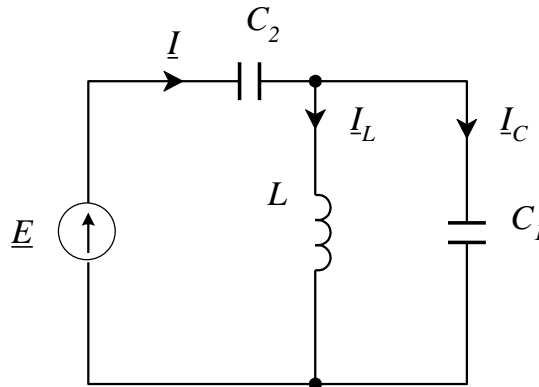
Rezystancję rezonansową obwodu można wyrazić jako:

$$R_0 = \frac{1}{G'} = \frac{L}{CR_L} \quad (20)$$

Omawiane obwody mogą być zastosowane do filtracji sygnałów prądowych. Sygnały prądowe o częstotliwościach zbliżonych do częstotliwości rezonansowej są tłumione ponieważ obwód charakteryzuje się dużą impedancją wejściową.

2.2. Szeregowo - równoległy obwód RLC

Rozpatrując obwód przedstawiony na rys. 8 należy zauważyć, iż możliwe jest wystąpienie dwóch rodzajów rezonansu: szeregowego i równoległego.



Rys.8.. Szeregowo-równoległy obwód LC

Rezonans równoległy wystąpi, gdy źródło napięcia zasilającego będzie miało częstotliwość dla której wypadkowa susceptancja gałęzi połączonych równoległe będzie równa zero:

$$B_{C1} - B_{L1} = 0 \quad (21)$$

$$\omega_r C_1 = \frac{1}{\omega_r L_1} \quad (22)$$

Wartość pulsacji (częstotliwości) dla której wystąpi rezonans równoległy wynosi więc

$$\omega_r^2 = \frac{1}{C_1 L_1} \quad (23)$$

Rezonans szeregowy wystąpi w tedy, gdy reaktancja wejściowa obwodu będzie równa zero. W rozpatrywanym przypadku reaktancja wejściowa obwodu wynosi:

$$X = -X_{C2} - X_{L1} \frac{X_{C1}}{X_{L1} - X_{C1}} \quad (24)$$

Po przekształceniu otrzymuje się

$$X = -\frac{X_{C1}X_{C2} - X_{L1}(X_{C1} + X_{C2})}{X_{L1} - X_{C1}} \quad (25)$$

Warunek rezonansu szeregowego będzie spełniony, jeżeli licznik powyższego wyrażenia będzie równy zero. Tak więc nowe warunki rezonansu szeregowego mogą być zapisane w postaci:

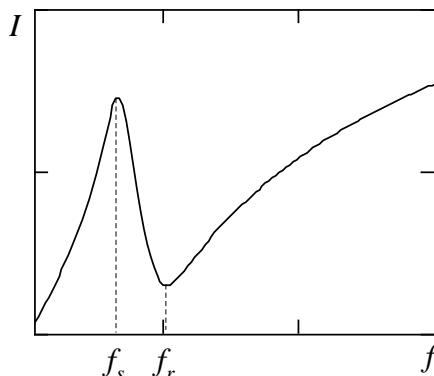
$$X_{C1}X_{C2} - X_{L1}(X_{C1} + X_{C2}) = 0 \quad (26)$$

Po przekształceniach otrzymujemy następującą zależność na pulsację (częstotliwość) rezonansu szeregowego:

$$\omega_s^2 = \frac{1}{L_1(C_1 + C_2)} \quad (27)$$

Wyznaczając wartości prądu pobieranego ze źródła funkcji częstotliwości napięcia zasilającego można wyznaczyć charakterystykę częstotliwościową badanego obwodu. Prąd jako odpowiedź na napięcie zasilające ilustruje zachowanie się obwodu oraz jego własności, gdy jest on zasilany ze źródła napięcia sinusoidalnie zmiennego o stałej amplitudzie i regulowanej częstotliwości.

Jak widać na rys.10 maksimum prądu pobieranego ze źródła wystąpi w stanie rezonansu szeregowego. Minimum prądu jest efektem rezonansu równoległego. Zmieniając częstotliwość napięcia zasilającego od zera do nieskończoności stwierdzamy, że rezonans szeregowy pojawia się pierwszy, ponieważ w wyrażeniu na częstotliwość rezonansową (27) mianownik ma większą wartość niż w przypadku rezonansu równoległego (23).



Rys. 10. Charakterystyka rezonansowa.

3. Program ćwiczenia

3.1 Równoległy obwód RLC

- 1*. Zaprojektować i narysować schemat laboratoryjnego obwodu elektrycznego do badania zjawiska rezonansu równoległego. Obwód musi zawierać równoległą gałąź **LC**, połączoną szeregowo z rezystorem dekadowym **R**. Zasilany będzie z generatora sygnału sinusoidalnie zmiennego o regulowanej częstotliwości napięcia. Obwód powinien zawierać oscyloskop dwukanałowy ułatwiający dokładniejsze wyznaczenie częstotliwości rezonansowej. Pierwszy kanał oscyloskopu mierzy napięcie zasilające a drugi prąd zasilający (spadek napięcia na **R**). Należy także uwzględnić woltomierz do kontroli wartości napięcia zasilającego oraz amperomierz do pomiaru całkowitego prądu płynącego w obwodzie. Układ należy zaprojektować w taki sposób aby masa generatora oraz masy obu kanałów oscyloskopu miały ten sam potencjał.

Schemat układ rezonansu równoległego.

- 2*. Rezystor **R** stosowany w obwodzie ma dwie funkcje, ograniczać maksymalny prąd w obwodzie i dostarczać do kanału oscyloskopu napięcie proporcjonalne do prądu (moduł i faza). Określ wartość rezystancji **R**, którą należy włączyć do obwodu aby ograniczyć prąd do **3mA**, przy napięciu zasilającym generatora **6V** (wartość skuteczna).

R=

3. Na kondensatorze dekadowym ustaw wartość **C=0.03μF**. Wybierz cewkę powietrzną o wartości **L=0.069H**. Stosując wybrane elementy i przyrządy pomiarowe połącz obwód zgodnie ze schematem z punktu 1).

4. Napisz odpowiednie wyrażenie, które pozwala obliczyć częstotliwość rezonansu równoległego **f₀** dla danych wartości elementów **L** i **C**.

f₀=

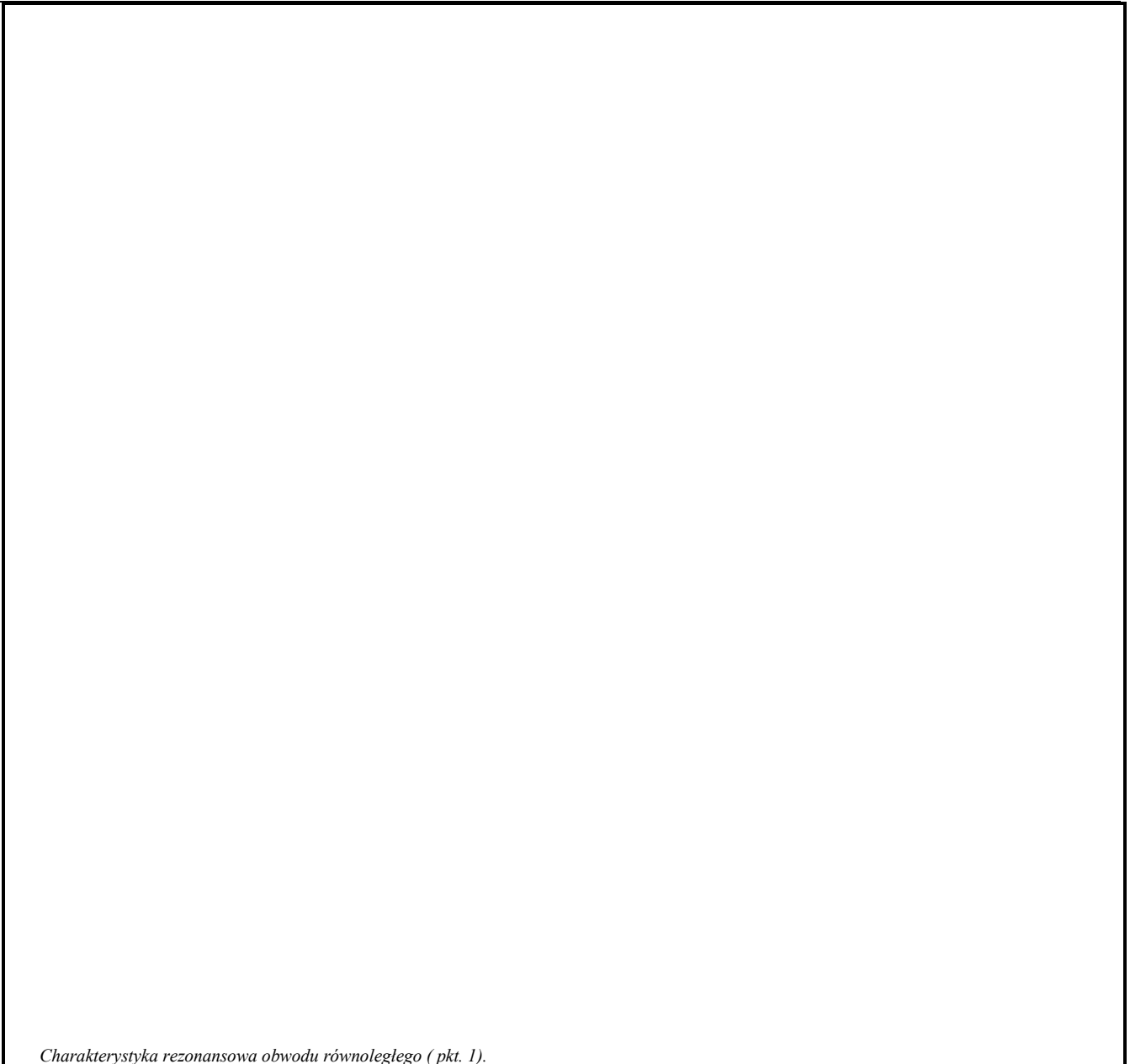
5. Oblicz według wzoru (w pkt.4) częstotliwość rezonansową f_0 dla ustawionych wartości elementów L i C (w pkt.3)

$f_0 =$

6. Wykonaj pomiary charakterystyki częstotliwościowej układu. Utrzymując stałą wartość napięcia generatora $U=6V$ (skuteczne), zmierz prąd dla różnych wartości częstotliwości napięcia zasilającego. i zanotuj w poniższej tabeli. Charakterystyka powinna zawierać minimum 20 punktów pomiarowych, przy czym (ze względu na dużą stromość przebiegu w stanach bliskich rezonansowi) im częstotliwość napięcia jest bliższa f_0 to zmiany częstotliwości powinny być mniejsze.

f	[kHz]													
I	[mA]													
f	[kHz]													
I	[mA]													

7. Oscyloskop przełącz w tryb pracy X-Y. Wówczas na ekranie dla nierezonansowych częstotliwości trajektoria będzie miała kształt elipsy, natomiast dla częstotliwości rezonansowej będzie odcinkiem prostym. Reguluj częstotliwość aż do osiągnięcia rezonansu, co stwierdzisz na podstawie kształtu trajektorii na ekranie oscyloskopu. Odczytaj wartość częstotliwości rezonansowej ze skali generatora i zapisz ją w tabeli (w pkt. 6)
8. Narysuj i opisz osie wykresu w odpowiedniej skali. Narysuj charakterystykę rezonansową, zależność wartości prądu od częstotliwości według tabeli (w pkt.6).



9. Wykorzystując wykonane pomiary napięcia i prądu, oblicz moduł impedancji obwodu w stanie rezonansu.

$Z=$

10. Przyjmując, że rezystor dekadowy o ustawionej wartości R jest przyłączony szeregowo do obwodu rezonansu równoległego (równoległa gałąź LC), wyznacz impedancję gałęzi równoległej w stanie rezonansu.

$Z_0=Z-R=$

11*. Zakładając znaczącą wartość rezystancji cewki indukcyjnej R_L , narysuj zmodyfikowany obwód gałęzi równoległej uwzględniający tę rezystancję (szeregowe połączenie R_L i L).

Schemat zmodyfikowanego układu rezonansu równoległego.

12*. Napisz wzór dla zmodyfikowanego obwodu (pkt.11) na wartość impedancji wejściowej w stanie rezonansu. Zauważ od jakich parametrów jest zależna ta impedancja.

$Z_0 =$

13 Przekształć wzór (w pkt. 12), w celu obliczenia rezystancji cewki indukcyjnej R_L w stanie rezonansu. Oblicz tę wartość mając dane: Z_0 (pkt.10) L C (pkt.3) oraz f_0 (pkt.7).

$R_L =$

14 Napisz odpowiednie wyrażenie do obliczenia częstotliwości rezonansowej, rzeczywistego układu rezonansu równoległego (pkt.11) na podstawie parametrów obwodu. Oblicz i porównaj tę wartość f_0 z obliczoną w pkt. 5.

$f_0 =$

15 Wykorzystaj otrzymane wyniki badań, do przeprowadzenia analizy jakościowej i ilościowej obwodu dla granicznych częstotliwości napięcia. Mając wartości impedancji oblicz prąd. Porównaj obliczone prądy z otrzymanymi podczas pomiarów laboratoryjnych

f	f = 0	f = f₀	f = ∞
B_L			
B_C			
B			
Z₀			
I			

3.1 Szeregowo - równoległy obwód RLC

16 Zmodyfikuj istniejący obwód laboratoryjny przez włączenie dodatkowego kondensatora C_0 szeregowo z obwodem rezonansu równoległego (gałęzią równoległą LC). Oblicz i ustaw wartości pojemności kondensatorów tak aby rezonans szeregowy zachodził przy częstotliwości $f_{0S}=3\text{kHz}$, a rezonans równoległy przy $f_{0R}=8\text{kHz}$. Zastosuj cewkę indukcyjną o wartości $L=0.05\text{H}$. Obliczenia wykonaj przy założeniu $R_L=0$.

$C_0=$

$C=$

17. Oscyloskop przełącz w tryb pracy X-Y. Dla częstotliwości rezonansowych trajektoria widziana na ekranie oscyloskopu będzie miała kształt odcinka prostego. Reguluj częstotliwość aż do osiągnięcia rezonansu. Odczytaj wartości częstotliwości rezonansu szeregowego i równoległego ze skali generatora i porównaj je z założonymi. (w pkt. 16)

Wykonaj pomiary charakterystyki częstotliwościowej układu szeregowo równoległego.

18.. Utrzymując stałą wartość napięcia generatora $U = 6\text{V}$ (skuteczne), zmierz prąd dla różnych wartości częstotliwości napięcia zasilającego. i zanotuj w poniższej tabeli.

f	[kHz]													
I	[mA]													
f	[kHz]													
I	[mA]													

19. Narysuj i opisz osie wykresu w odpowiedniej skali. Narysuj charakterystykę rezonansową, zależność wartości prądu od częstotliwości według tabeli (w pkt.6).

Charakterystyka rezonansowa obwodu szeregowo równoległego (pkt. 16).

20. Ćwiczenie laboratoryjne należy zakończyć sprawdzeniem poprawności otrzymanych wyników pomiarowych, uzupełnić protokół o dane, które będą niezbędne do poprawnego wykonania sprawozdania.

Laboratorium Podstaw Elektrotechniki

Temat ćwiczenia:

Badanie czwórników

Instytut Podstaw Elektrotechniki i Elektrotechnologii -



Zakład Elektrotechniki Teoretycznej



1. CEL I ZAKRES ĆWICZENIA.

Celem ćwiczenia jest eksperymentalne wyznaczenie parametrów charakteryzujących czwórniki symetryczne. Dodatkowym celem jest sprawdzenie stopnia zgodności między parametrami wyznaczonymi obliczeniowo i pomiarowo dla układów zastępczych przy różnych sposobach połączenia czwórników.

Zakres niniejszego ćwiczenia obejmuje wyznaczenie elementów macierzy łańcuchowej elementarnego czwórnika oraz macierzy zastępczej układu złożonego z kilku czwórników. Do realizacji pomiarów parametrów czwórnika zastosowano metodę 3 woltomierzy (3V).

W programie niniejszego ćwiczenia ograniczono się tylko do połączenia łańcuchowego. Wynikami końcowymi ćwiczenia jest porównanie parametrów zastępczej macierzy łańcuchowej całego połączenia łańcuchowego uzyskanymi z pomiaru a wynikami obliczonymi z iloczynu macierzy czwórników elementarnych tworzących połączenie.

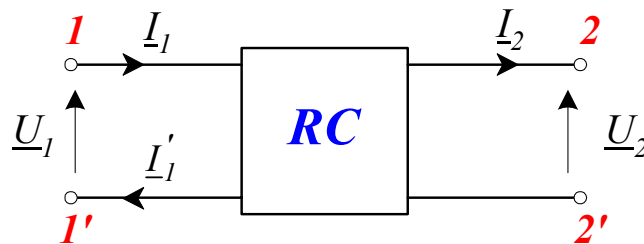
Jako dodatkowe zadanie w zakresie ćwiczenia wchodzi wyznaczenie pomiarowe i obliczeniowe rozkładu napięć na łańcuchu czwórników w stanie otwartym i zwartym. W celu ułatwienia i zmniejszenia pracochłonności obliczeń zaleca się wykorzystanie pomocniczych obliczeń komputerowych.

W części końcowej instrukcji zamieszczono programy obliczeń w języku Matlab oraz przedstawiono przykładowe ich wykorzystanie.

2. WPROWADZENIE TEORETYCZNE

2.1. Równania macierzowe

Czwórnik jest układem cztero-zaciskowym (dwuwrotnikiem), w którym wyróżnione zostały dwie pary zacisków-para zacisków wejściowych i wyjściowych. Schemat ogólny czwórników z przyjętymi oznaczeniami przedstawiono na Rys. 1.



Rys. 1 Symbol ogólny czwórnika z wielkościami wejścia i wyjścia

W uzupełnieniu definicji czwórnika wymagane jest dodatkowe spełnienie warunku regularności, który polega na równości prądów przynajmniej dla jednej wybranej pary zacisków (np. $I_1 = I_1'$).

Jako podstawowe równania opisujące czwórniki przyjmuje się równania postaci łańcuchowej, które można zapisać w ujęciu macierzowym

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

lub w postaci skróconej

$$W_1 = AW_2 \quad (2)$$

gdzie: W_1 i W_2 są macierzami kolumnowymi wielkości wejściowych i wyjściowych.

Z założenia dla rozpatrywanych w ćwiczeniu czwórników pasywnych symetrycznych, spełniany jest jednocześnie warunek odwracalności:

$$\det A = 1 \quad (3)$$

oraz symetrii

$$A_{11} = A_{22} \quad (4)$$

2.2. Parametry charakterystyczne czwórnika

Macierz łańcuchowa czwórnika symetrycznego może być przedstawiana w postaci hiperbolicznej

$$A = \begin{bmatrix} \operatorname{ch} g & \underline{Z}_c \operatorname{sh} g \\ \frac{1}{\underline{Z}_c} \operatorname{sh} g & \operatorname{ch} g \end{bmatrix} \quad (5)$$

Gdzie parametry charakterystyczne g , \underline{Z}_c określone są wzorami:

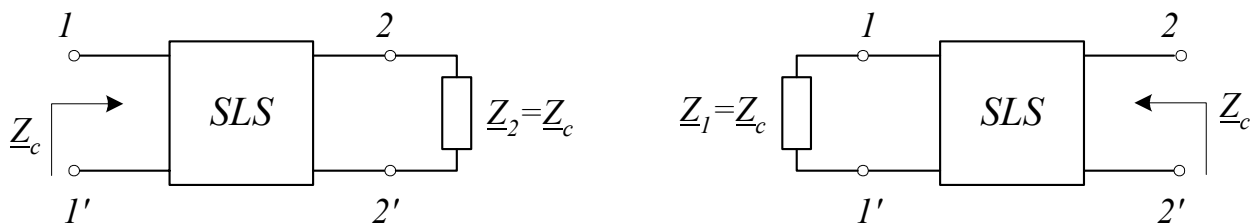
$$\underline{Z}_c = \sqrt{\frac{A_{12}}{A_{21}}} \underline{Z}_c \quad (6)$$

$$g = \operatorname{ar ch} A_{11} = \ln \left[A_{11} + \sqrt{A_{11}^2 - 1} \right] \quad (7)$$

lub

$$g = \operatorname{ar sh} \sqrt{A_{12}A_{21}} \quad (8)$$

Wielkość \underline{Z}_c jest impedancją charakterystyczną lub falową, spełnia ważny warunek dopasowania (Rys. 2).



Rys. 2

Wielkość g jest współczynnikiem przenoszenia lub tzw. tłumnością falową. Jako liczba zespolona może być przedstawiona w postaci

$$g = a + jb \quad (9)$$

gdzie: a jest współczynnikiem tłumienia (tłumiennością falową), b jest współczynnikiem przesunięcia fazy (przesuwnością falową).

Tamowność, tłumienność oraz przesuwności związane są z napięciami i prądami w warunkach dopasowania charakterystycznego czwórnika wzorami

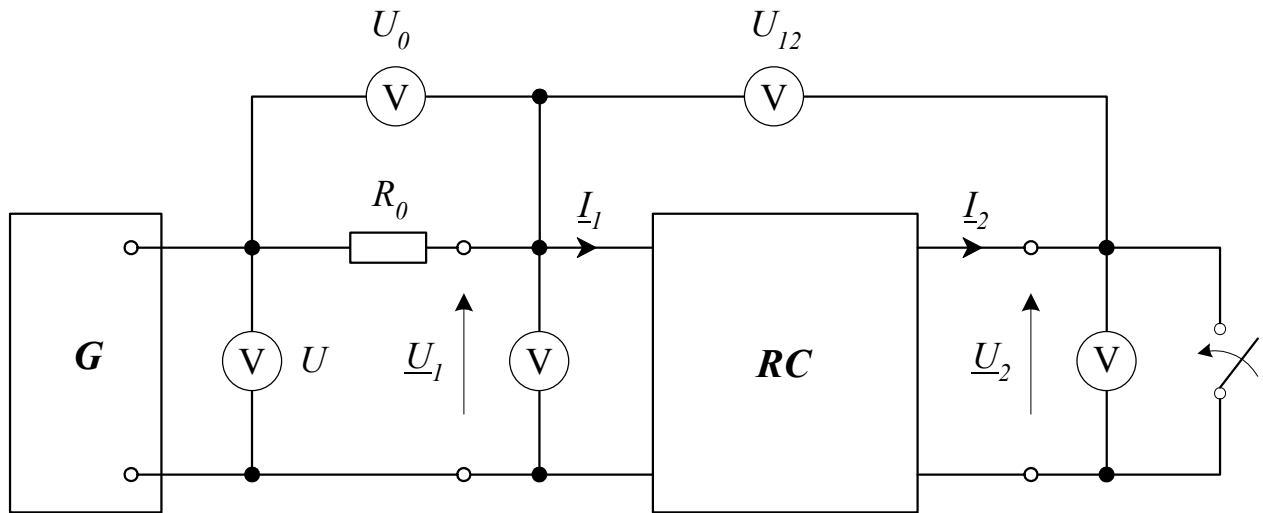
$$g = \ln \frac{|\underline{U}_1|}{|\underline{U}_2|} \Big|_{Z_2=Z_c} = \ln \frac{|\underline{I}_1|}{|\underline{I}_2|} \Big|_{Z_2=Z_c} \quad (10)$$

$$a = \ln \frac{|\underline{U}_1|}{|\underline{U}_2|} \Big|_{Z_2=Z_c} = \ln \frac{|\underline{I}_1|}{|\underline{I}_2|} \Big|_{Z_2=Z_c} = \frac{1}{2} \ln \frac{|P_1|}{|P_2|} \Big|_{Z_2=Z_c} \quad (11)$$

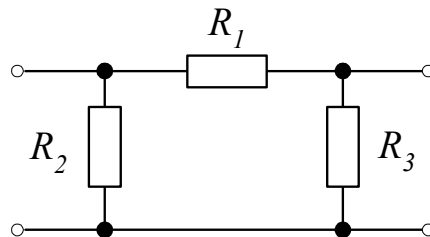
$$b = [\arg \underline{U}_1 - \arg \underline{U}_2] \Big|_{Z_2=Z_c} = [\arg \underline{I}_1 - \arg \underline{I}_2] \Big|_{Z_2=Z_c} \quad (12)$$

2.3. Metoda pomiaru parametrów czwórnika symetrycznego

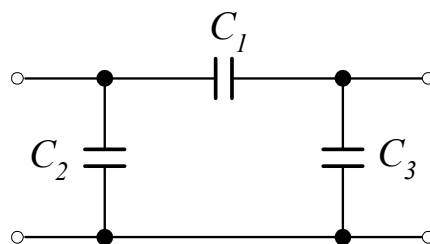
W celu wyznaczenia macierzy łańcuchowej na podstawie pomiaru, zastosowano układ trzech woltmierzów (3V) przedstawiony na Rys. 3.



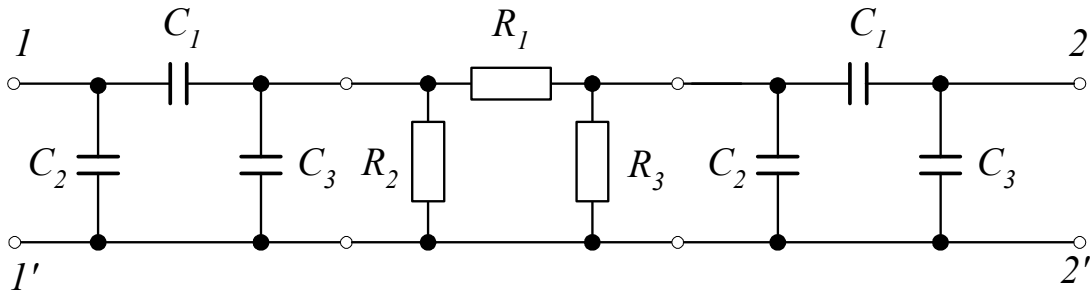
Rys. 3 Układ połączeń do pomiaru czwórnika, G – generator (zasilacz), R_0 – opornica dekadowa, V – woltmierz cyfrowe, RC – badany czwórnik



Rys. 4 Czwórnik rezystancyjny typu Π , $R_2 = R_3$



Rys. 5 Czwórnik pojemnościowy typu Π , $C_2 = C_3$

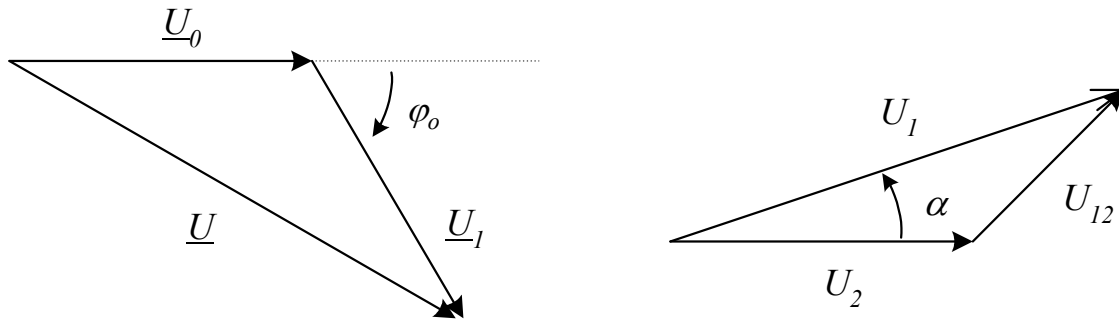


Rys. 6 Połączenie łańcuchowe czwórników typu Π CRC $C_2 = C_3, R_2 = R_3$

W miejsce czwórnika zaznaczonego na Rys. 3 ogólnym symbolem **RC** należy włączyć czwórniki przedstawione kolejno na Rys. 4, 5 oraz 6 i wykonać pomiary zgodnie z programem.

Dla czwórnika symetrycznego w celu wyznaczenia jego macierzy łańcuchowej wystarczy wykonać jeden pomiar w stanie jałowym (otwartym) impedancji wejściowej czwórnika \underline{Z}_0 oraz jeden pomiar impedancji wejściowej w stanie zwarcia \underline{Z}_z .

Dla przyjętych oznaczeń, jak na rysunku (Rys. 3) schematu połączeń, można wyprowadzić kolejno następujące wzory (na podstawie trójkąta napięć z zastosowaniem wzoru kosinusów) dla stanu otwartego $I_2 = 0$, obliczamy kolejno



$$\cos \varphi_0 = \frac{U^2 - U_0^2 - U_1^2}{2U_0U_1} \tag{13}$$

$$\underline{Z}_0 = R_0 \frac{U_1}{U_0} e^{j\varphi_0} \tag{14}$$

gdzie znak argumentu należy określić dodatkowo na podstawie informacji o charakterze obciążenia (ponieważ z założenia w ćwiczeniu stosowane będą tylko elementy RC przyjmuje się znak kąta ujemny $\varphi_0 \leq 0$).

Dodatkowo w stanie otwartym oblicza się pomocniczą wielkość jako kosinus kąta przesunięcia między napięciami \underline{U}_1 i \underline{U}_2 z wzoru

$$\cos \alpha = \frac{U_{12}^2 - U_1^2 - U_2^2}{2U_1U_2} \tag{15}$$

W podobny sposób na podstawie pomiarów tych samych napięć w stanie zwarcia przyjmując $U_2 = 0$, obliczamy \underline{Z}_z z wzoru

$$\cos \varphi_z = \frac{U^2 - U_0^2 - U_1^2}{2U_0U_1} \quad (16)$$

$$\underline{Z}_0 = R_0 \frac{U_1}{U_0} e^{j\varphi_z} \quad (17)$$

Na podstawie ogólnych równań czwórnika elementy macierzy łańcuchowej można wyrazić przez impedancje stanu otwartego i stanu zwarcia następującymi wzorami

$$\underline{Z}_0 = \frac{A_{11}}{A_{21}} \quad (18)$$

$$\underline{Z}_z = \frac{A_{12}}{A_{22}} \quad (19)$$

Uwzględniając powyższe wzory i warunek symetrii (3), (4) otrzymuje się ostatecznie wyrażenia na elementy macierzy łańcuchowej w następującej postaci

$$A_{11} = \pm \sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Z}_0 - \underline{Z}_z}} \quad (20)$$

$$A_{12} = A_{11} \underline{Z}_z \quad (21)$$

$$A_{21} = \frac{A_{11}}{\underline{Z}_0} \quad (22)$$

$$A_{22} = A_{11} \quad (23)$$

W celu jednoznacznego wyboru znaku dla stałej A_{11} należy wykorzystać dodatkowy warunek zgodności znaków

$$\text{sgn}\{\text{Re } A_{11}\} = \text{sgn}\{\cos \alpha\} \quad (24)$$

Następnie na podstawie podanych wyżej wzorów dla parametrów charakterystycznych oblicza się impedancję charakterystyczną \underline{Z}_c oraz współczynniki przenoszenia g , tłumienia a i przesunięcia b (tamowność, tłumienność, przesuwność).

Można również wykorzystać bezpośrednie związki parametrów charakterystycznych z impedancjami stanu jałowego i stanu zwarcia wyrażone wzorami

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\underline{Z}_0 \cdot \underline{Z}_z}, \quad \text{th } g = \sqrt{\frac{\underline{Z}_z}{\underline{Z}_0}} \quad (25)$$

2.4. Obliczenia rozkładu napięć w łańcuchu czwórników.

Rozpatrywane jest połączenie łańcuchowe n jednakowych czwórników pracujących w stanie jałowym i stanie zwarcia. Na podstawie iloczynu macierzy w postaci hiperbolicznej wynikają następujące wzory:

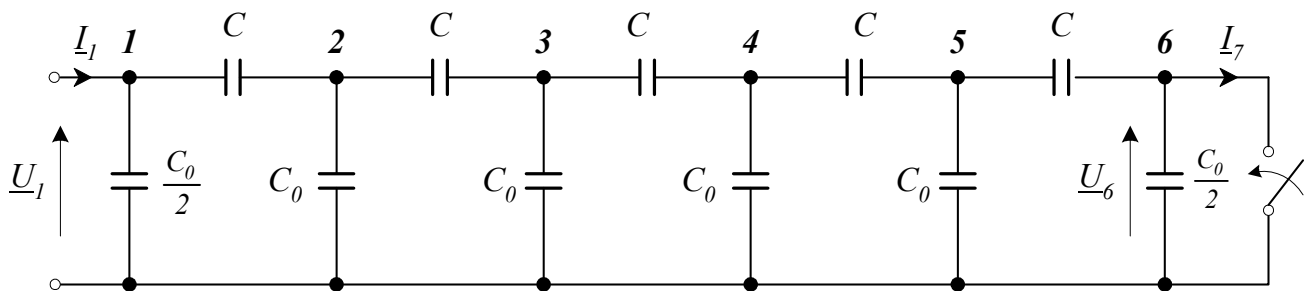
Stan otwarty $I_{konc} = 0$, w ćw. $I_7 = 0$

$$\frac{U_k}{U_1} = \left| \frac{\mathbf{ch}(n+1-k)g}{\mathbf{ch}ng} \right| \quad (26)$$

Stan zwarty $U_{konc} = 0$, w ćw. $U_6 = 0$

$$\frac{U_k}{U_1} = \left| \frac{\mathbf{sh}(n+1-k)g}{\mathbf{sh}ng} \right| \quad (27)$$

gdzie przez k oznaczono kolejny numer zacisków łańcucha.



Rys. 7 Układ łańcuchowy, rozkład napięć U_k stanie otwartym i zwartym

3. PROGRAM ĆWICZENIA

1. Dla zadanych 2 oddzielnych czwórników elementarnych typu Rys. 4 i Rys. 5 wyznaczyć przedstawioną wyżej metodę elementy macierzy łańcuchowej tych czwórników (AC i AR),
2. Zbudować czwórnik złożony, jako połączenie łańcuchowe trzech czwórników w kolejności $IIC IIR IIC$ - Rys. 6, wykonać pomiary w celu wyznaczenia dla tego układu zastępczej macierzy łańcuchowej A .
3. Na podstawie danych z p.1 obliczyć iloczyn macierzy $AC \cdot AR \cdot AC$ i porównać wynik z wynikiem z punktu 2.
4. Zbudować łańcuch czwórników złożony z 5-ciu elementarnych czwórników IIC i zmierzyć napięcia na wszystkich zaciskach tego układu w stanie jałowym (otwartym) i zwartym. Porównać wyniki otrzymane z tego pomiaru z obliczonymi na podstawie podanych wyżej wzorów dla łańcucha otwartego i zwanego.
5. Sporządzić protokoły pomiarów i na ich podstawie sprawozdanie zawierające uwagi i wnioski z wykonanego ćwiczenia.

4. REALIZACJA ĆWICZENIA

1. Sprawdzić komplet niezbędnych elementów układu połączeń:

- zasilacz regulowany napięcia sinusoidalnego (możliwe jest zasilanie z sieci przez autotransformator),
- 3 woltomierze cyfrowe,
- opornica dekadowa $10 \times 100 \Omega$,
- komplet 5 czwórników pojemnościowych typu Π ,
- przynajmniej jeden czwórnik rezystancyjny typu Π .

2. Zestawić układ połączeń do pomiaru impedancji wejściowych w stanie jałowym i w stanie zwarcia jak na Rys. 3.

- przeprowadzić kontrolę układu bez włączenia zasilania,
- zgłosić gotowość przystąpienia do pomiaru prowadzącemu,
- wykonać pomiary zgodnie z programem.

Uwaga- ze względu na obciążalność opornicy dekadowej 0.1 A nie przekraczać zasilania 20V, przy nastawionej rezystancji 100Ω .

Zapisać wyniki pomiarów w tabelach oddzielnie dla stanu jałowego $I_{konc} = 0$ oraz stanu zwarcia $U_{konc} = 0$.

W protokole prowadzonym w czasie ćwiczenia wyniki pomiarów zanotować w tabeli 1, w sprawozdaniu wyniki pomiarów i wyniki otrzymane z obliczeń dla połączenia łańcuchowego zanotować w tabelach postaci 2 i 3.

Tabela 1.

Lp.	R_0	U	U_1	U_2	U_{12}	U_0	<i>Uwagi</i>
	Ω	V	V	V	V	V	-
1							
2							
3							

Obliczone stałe czwórnika zanotować w tabeli 2. Obliczenia wykonać na kalkulatorze lub komputerze przy wykorzystaniu programu pakietu Matlab.

Tabela 2

Lp.	A_{11}	A_{12}	A_{21}	A_{22}	<i>Uwagi</i>
	-	Ω	S	-	
1					ΠR
2					ΠC
3					$\Pi C \Pi R \Pi C$

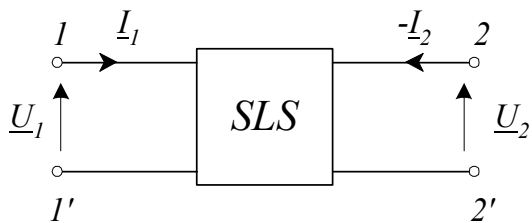
Pomierzone i obliczone napięcia w kolejnych punktach pomiarowych łańcucha w stanie otwartym i zwartym zanotować w tabeli 3.

Tabela 3 $U_1 =$

Lp.	Otwarty		Zwarty	
	<i>pom.</i>	<i>obl.</i>	<i>pom.</i>	<i>obl.</i>
	U_k	U_k	U_k	U_k
1				
2				
3				
4				
5				
6				

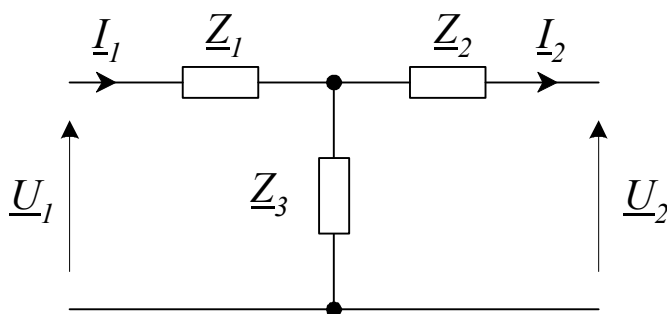
5. PYTANIA KONTROLNE

1. Co to jest czwórnik ? Jaka jest różnica między czwornikiem a czterobiegunnikiem.
2. Co to są i co wyrażają warunki odwracalności i symetrii czwornika ?
3. Podać definicję parametrów charakterystycznych Z_c i g czwornika.
4. Jak przedstawia się macierz połączenia łańcuchowego jednakowych czworników w postaci hiperbolicznej.
5. Podać jakie zachodzą relacje i dla jakich macierzy przy połączeniu szeregowym, równoległym i mieszanym (hybrydowym).



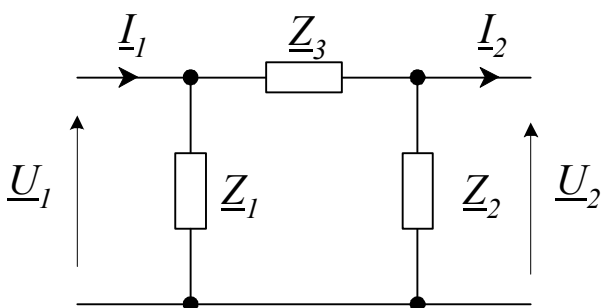
Równania impedancyjne		Równania admitancyjne		
$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ -\underline{I}_2 \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ -\underline{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix}$		
Równania łańcuchowe		Równania hybrydowe		
$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} a_{11} = A & a_{12} = B \\ a_{21} = C & a_{22} = D \end{matrix}$		$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ -\underline{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix}$		
Warunki odwracalności		Warunki symetrii		
$\begin{matrix} z_{12} = z_{21} \\ y_{12} = y_{21} \\ \det A = 1 \\ h_{12} = -h_{21} \end{matrix}$		$\begin{matrix} z_{12} = z_{21} & z_{11} = z_{22} \\ y_{12} = y_{21} & y_{11} = y_{22} \\ \det A = 1 & A = D \\ h_{12} = -h_{21} & \det H = 1 \end{matrix}$		
	Z	Y	A	H
Z	$\begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{y_{22}}{\det Y} & \frac{-y_{12}}{\det Y} \\ \frac{-y_{21}}{\det Y} & \frac{y_{11}}{\det Y} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{a_{11}}{a_{21}} & \frac{\det A}{a_{21}} \\ 1 & \frac{a_{22}}{a_{21}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{\det H}{h_{22}} & \frac{h_{12}}{h_{22}} \\ \frac{-h_{21}}{h_{22}} & \frac{1}{h_{22}} \end{bmatrix}$
Y	$\begin{bmatrix} \frac{z_{22}}{\det Z} & \frac{-z_{12}}{\det Z} \\ \frac{-z_{21}}{\det Z} & \frac{z_{11}}{\det Z} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{a_{22}}{a_{12}} & \frac{\det A}{a_{12}} \\ 1 & \frac{a_{11}}{a_{12}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{h_{11}} & \frac{-h_{12}}{h_{11}} \\ \frac{h_{21}}{h_{11}} & \frac{\det H}{h_{11}} \end{bmatrix}$
A	$\begin{bmatrix} \frac{z_{11}}{z_{21}} & \frac{\det Z}{z_{21}} \\ 1 & \frac{z_{22}}{z_{21}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{-y_{22}}{y_{21}} & \frac{-1}{y_{21}} \\ -\det Y & \frac{-y_{11}}{y_{21}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{-\det H}{h_{21}} & \frac{-h_{11}}{h_{21}} \\ \frac{-h_{22}}{h_{21}} & \frac{-1}{h_{21}} \end{bmatrix}$
H	$\begin{bmatrix} \frac{\det Z}{z_{22}} & \frac{z_{12}}{z_{22}} \\ \frac{-z_{21}}{z_{22}} & \frac{1}{z_{22}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{y_{11}} & \frac{-y_{12}}{y_{11}} \\ y_{21} & \det Y \\ y_{11} & y_{11} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{a_{12}}{a_{22}} & \frac{\det A}{a_{22}} \\ -1 & \frac{a_{21}}{a_{22}} \\ a_{22} & a_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}$

1. Czwórnik o strukturze typu T.



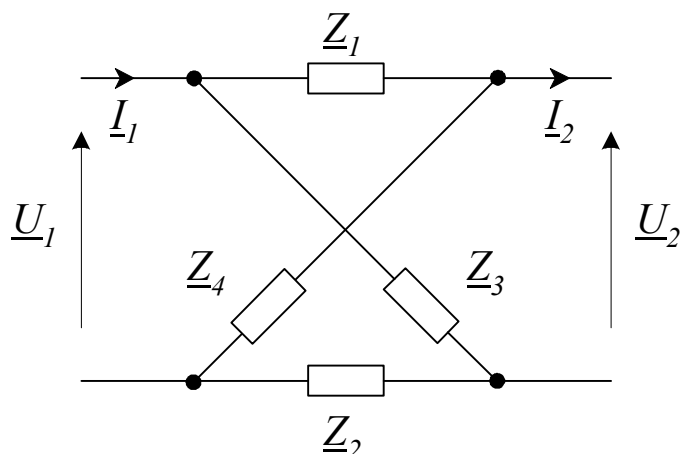
$Z = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_3 & Z_3 \\ Z_3 & Z_2 + Z_3 \end{bmatrix}$	$Y = \begin{bmatrix} \frac{Z_2 + Z_3}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1} & -\frac{Z_3}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1} \\ -\frac{Z_3}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1} & \frac{Z_1 + Z_3}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1} \end{bmatrix}$
$A = \begin{bmatrix} 1 + \frac{Z_1}{Z_3} & Z_1 + Z_2 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_3} \\ \frac{1}{Z_3} & 1 + \frac{Z_2}{Z_3} \end{bmatrix}$	$H = \begin{bmatrix} Z_1 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3} & \frac{Z_3}{Z_2 + Z_3} \\ \frac{-Z_3}{Z_2 + Z_3} & \frac{1}{Z_2 + Z_3} \end{bmatrix}$

2. Czwórnik o strukturze typu Π



$Z = \begin{bmatrix} \frac{Z_1(Z_2 + Z_3)}{Z_1 + Z_2 + Z_3} & \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2 + Z_3} \\ \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2 + Z_3} & \frac{Z_2(Z_1 + Z_3)}{Z_1 + Z_2 + Z_3} \end{bmatrix}$	$Y = \begin{bmatrix} \frac{Z_1 + Z_3}{Z_1 Z_3} & -\frac{1}{Z_3} \\ -\frac{1}{Z_3} & \frac{Z_2 + Z_3}{Z_2 Z_3} \end{bmatrix}$
$A = \begin{bmatrix} 1 + \frac{Z_3}{Z_2} & Z_3 \\ \frac{Z_1 + Z_2 + Z_3}{Z_1 Z_2} & 1 + \frac{Z_3}{Z_1} \end{bmatrix}$	$H = \begin{bmatrix} \frac{Z_1 Z_3}{Z_1 + Z_3} & \frac{Z_1}{Z_1 + Z_3} \\ \frac{-Z_1}{Z_1 + Z_3} & \frac{Z_1 + Z_2 + Z_3}{Z_2(Z_1 + Z_3)} \end{bmatrix}$

3. Czwórnik "krzyżowy" (mostkowy).

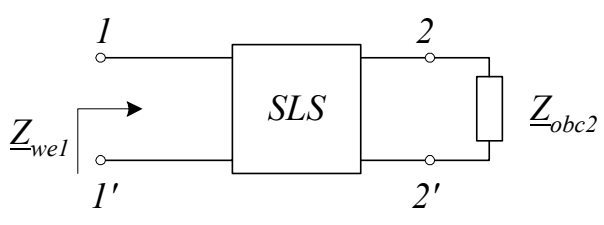
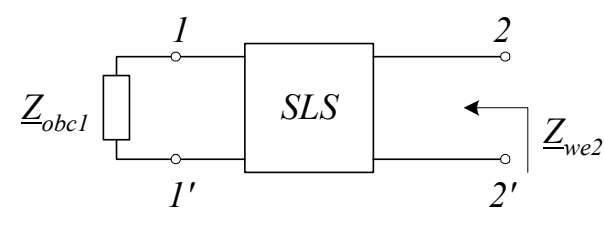


$$Z = \begin{bmatrix} \frac{(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_4)(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3)}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4} & \frac{\underline{Z}_3 \underline{Z}_4 - \underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4} \\ \frac{\underline{Z}_3 \underline{Z}_4 - \underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4} & \frac{(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3)(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_4)}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4} \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} \frac{(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3)(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_4)}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 (\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4) + \underline{Z}_3 \underline{Z}_4 (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)} & \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_3 \underline{Z}_4}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 (\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4) + \underline{Z}_3 \underline{Z}_4 (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)} \\ \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_3 \underline{Z}_4}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 (\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4) + \underline{Z}_3 \underline{Z}_4 (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)} & \frac{(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_4)(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3)}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 (\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4) + \underline{Z}_3 \underline{Z}_4 (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_4)(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3)}{\underline{Z}_3 \underline{Z}_4 - \underline{Z}_1 \underline{Z}_2} & \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 (\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4) + \underline{Z}_3 \underline{Z}_4 (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)}{\underline{Z}_3 \underline{Z}_4 - \underline{Z}_1 \underline{Z}_2} \\ \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4}{\underline{Z}_3 \underline{Z}_4 - \underline{Z}_1 \underline{Z}_2} & \frac{(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3)(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_4)}{\underline{Z}_3 \underline{Z}_4 - \underline{Z}_1 \underline{Z}_2} \end{bmatrix}$$

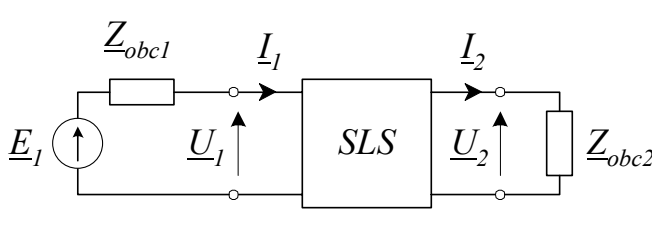
$$H = \begin{bmatrix} \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 (\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4) + \underline{Z}_3 \underline{Z}_4 (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)}{(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3)(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_4)} & \frac{\underline{Z}_3 \underline{Z}_4 - \underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3)(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_4)} \\ \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_3 \underline{Z}_4}{(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3)(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_4)} & \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4}{(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3)(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_4)} \end{bmatrix}$$

<p>Impedancja wejściowa (1 - 1')</p> $\underline{Z}_{we1} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{A\underline{Z}_{obc2} + B}{C\underline{Z}_{obc2} + D}$ $\underline{Z}_{10} = \underline{Z}_{we1} _{I_2=0} = \frac{A}{C} \quad \underline{Z}_{1z} = \underline{Z}_{we1} _{U_2=0} = \frac{B}{D}$	
<p>Impedancja wejściowa (2 - 2')</p> $\underline{Z}_{we2} = \frac{U_2}{-I_2} = \frac{D\underline{Z}_{obc1} + B}{C\underline{Z}_{obc1} + A}$ $\underline{Z}_{20} = \underline{Z}_{we2} _{I_1=0} = \frac{D}{C} \quad \underline{Z}_{2z} = \underline{Z}_{we2} _{U_1=0} = \frac{B}{A}$	

Dla czwórnika symetrycznego: $\underline{Z}_{10} = \underline{Z}_{20} = \underline{Z}_0 = \frac{A}{C}$, $\underline{Z}_{1z} = \underline{Z}_{2z} = \underline{Z}_z = \frac{B}{A}$

Równania łańcuchowe czwórnika odwracalnego ($AD - BC = 1$) wyrażone za pomocą impedancji wejściowych stanu zwarcia i stanu jałowego :

Czwórnik niesymetryczny	Czwórnik symetryczny
$A = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1z}\underline{Z}_{10}}{\underline{Z}_{2z}(\underline{Z}_{10} - \underline{Z}_{1z})}} \quad B = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1z}\underline{Z}_{10}\underline{Z}_{2z}}{\underline{Z}_{10} - \underline{Z}_{1z}}}$ $C = \sqrt{\frac{1}{\underline{Z}_{20}(\underline{Z}_{10} - \underline{Z}_{1z})}} \quad D = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{20}}{\underline{Z}_{10} - \underline{Z}_{1z}}}$	$A = \sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Z}_0 - \underline{Z}_z}} \quad B = \underline{Z}_z \sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Z}_0 - \underline{Z}_z}}$ $C = \frac{1}{\underline{Z}_0} \sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Z}_0 - \underline{Z}_z}} \quad D = A = \sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Z}_0 - \underline{Z}_z}}$

<p>Wzmocnienie napięciowe : $k_u = \frac{U_2}{U_1}$</p> <p>Wzmocnienie prądowe : $k_i = \frac{I_2}{I_1}$</p> <p>Skuteczne wzmocnienie napięciowe:</p> $k_{usk} = \frac{U_2}{E_1} = k_u \cdot \frac{\underline{Z}_{we1}}{\underline{Z}_{obc1} + \underline{Z}_{we1}}$	
---	--

	Wzmocnienie napięciowe - k_u	Wzmocnienie prądowe - k_i
Z	$\frac{z_{21}\underline{Z}_{obc2}}{z_{11}\underline{Z}_{obc2} + \det Z}$	$\frac{z_{21}}{z_{22} + \underline{Z}_{obc2}}$
Y	$\frac{-\underline{Z}_{obc2}y_{21}}{1 + \underline{Z}_{obc2}y_{22}}$	$\frac{\underline{Z}_{obc2}y_{21}}{y_{11} + \underline{Z}_{obc2}\det Y}$
A	$\frac{\underline{Z}_{obc2}}{B + A\underline{Z}_{obc2}}$	$\frac{1}{D + C\underline{Z}_{obc2}}$
H	$\frac{-\underline{Z}_{obc2}h_{21}}{h_{11} + h_{21}\underline{Z}_{obc2}\det H}$	$\frac{-h_{21}}{1 + \underline{Z}_{obc2}h_{22}}$

Impedancja charakterystyczna (falowa)

Czwórnik niesymetryczny	
<p>Impedancja charakterystyczna (falowa) - wejściowa (1 - 1'):</p> $\underline{Z}_{c1} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} \Big _{\underline{Z}_2 = \underline{Z}_{c2}} = \sqrt{\underline{Z}_{10} \cdot \underline{Z}_{1z}} = \sqrt{\frac{A \cdot B}{C \cdot D}}$	
<p>Impedancja charakterystyczna (falowa) - wejściowa (2 - 2'):</p> $\underline{Z}_{c2} = \frac{\underline{U}_2}{-\underline{I}_2} \Big _{\underline{Z}_1 = \underline{Z}_{c1}} = \sqrt{\underline{Z}_{20} \cdot \underline{Z}_{2z}} = \sqrt{\frac{D \cdot B}{C \cdot A}}$	
Czwórnik symetryczny	
$\underline{Z}_{c1} = \underline{Z}_{c2} = \underline{Z}_c = \sqrt{\underline{Z}_0 \cdot \underline{Z}_z} = \sqrt{\frac{B}{C}}$	$\text{th } g = \sqrt{\frac{\underline{Z}_z}{\underline{Z}_0}}$

Współczynnik przenoszenia czwórnika symetrycznego (tamowność falowa)

$$g = \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} \Big|_{\underline{Z}_{obc2} = \underline{Z}_c} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} \Big|_{\underline{Z}_{obc2} = \underline{Z}_c} = e^g = A + \sqrt{BC}$$

g - przekładnia (dla czwórnika symetrycznego $g_I = g_U$);

$g = a + jb$ gdzie : g - współczynnik przenoszenia (tamowność falowa);

a - współczynnik tłumienia (tłumienność falowa);

b - współczynnik fazowy (przesuwność falowa);

Postać hiperboliczna równań łańcuchowych czwórnika symetrycznego

$$A = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{ch } g & \underline{Z}_c \text{ sh } g \\ \frac{1}{\underline{Z}_c} \text{ sh } g & \text{ch } g \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{U}_2 \text{ch } g + \underline{I}_2 \underline{Z}_c \text{ sh } g \\ \underline{I}_1 &= \underline{U}_2 \frac{1}{\underline{Z}_c} \text{ sh } g + \underline{I}_2 \text{ch } g \end{aligned}$$

Laboratorium Elektrotechniki Teoretycznej
Teoria Obwodów 2
ELR021303L

Temat ćwiczenia:

**Model dwuprzewodowej
linii długiej**

Instytut Podstaw Elektrotechniki i Elektrotechnologii -



Zakład Elektrotechniki Teoretycznej



1. Cel ćwiczenia.

Celem ćwiczenia jest eksperymentalne badanie przebiegów falowych w dwuprzewodowej linii długiej w różnych stanach pracy.

2. Zakres ćwiczenia.

Ćwiczenie obejmuje badanie rozkładu przestrzennego fali napięcia i prądu dla różnych stanów pracy linii długiej - bezstratnej, w tym w szczególności:

- Określenie parametrów jednostkowych i falowych linii długiej,
- Badanie linii w stanie jałowym,
- Badanie linii w stanie zwarcia,
- Badanie linii przy obciążeniu pojemnością,
- Badanie linii przy obciążeniu impedancją falową.

UWAGA !

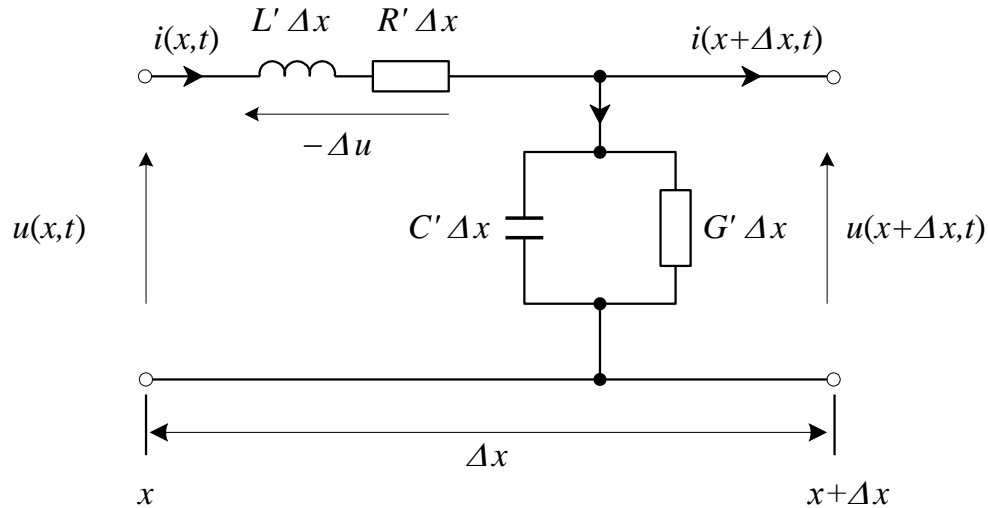
W celu sprawnego przebiegu ćwiczenia konieczne jest posiadanie kalkulatora.

3. Wstęp teoretyczny.

Podział obwodów elektrycznych na obwody o parametrach skupionych i rozłożonych jest umowny. Przy małej częstotliwości lub niewielkich rozmiarach geometrycznych obwodu elektrycznego, można bez uszczerbku dla dokładności obliczeń nie uwzględniać zjawisk związanych z czasowym rozprzestrzenieniem się stanu elektromagnetycznego w obwodzie. Taki obwód traktujemy jako zbiór oddzielnych elementów R , L , C – samodzielnie istniejących i skupionych w różnych punktach obwodu.

Ten sam obwód przy wielkiej częstotliwości lub przy małej częstotliwości ale o bardzo dużych rozmiarach stanowi złożony układ elektromagnetyczny, którego każdą część elementarną charakteryzują: rezystancja, konduktancja izolacji, indukcyjność i pojemność – nierozzerwalnie związane ze sobą, dlatego też wielkości elektryczne w układzie zmieniają się nie tylko w funkcji czasu, ale i w zależności od odległości między miejscem obserwacji a dowolnym ustalonym punktem, np. miejscem położenia źródła.

Najczęściej jako obwód o parametrach rozłożonych rozpatruje się linię jednorodną dwuprzewodową tj. taką linię, której rezystancja i indukcyjność przewodów, a także konduktancja izolacji i pojemności między przewodami są równomiernie rozłożone wzdłuż całej długości linii.



rys.1 Schemat zastępczy odcinka elementarnego linii długiej

Zgodnie z tym linię długą – jednorodną, dwuprzewodowa (rys.1) charakteryzują cztery pierwotne parametry elektryczne, odnoszone do jednostki długości linii:

– **Rezystancja jednostkowa** – R' , którą można obliczyć ze wzoru:

$$R' = \frac{2}{\sigma S} [\Omega / m] \quad (1)$$

gdzie: σ – konduktywność przewodu w temperaturze 20°C w $[\Omega m]$,
 S – przekrój przewodu w $[m^2]$

Przy wielkich częstotliwościach należy także uwzględnić zjawisko naskórkowości poprzez współczynnik strat dodatkowych k_d we wzorze na R' .

$$R' = \frac{2k_d}{\sigma S} [\Omega / m] \quad (2)$$

Współczynnik k_d dla przewodów o przekroju kołowym jest zależny od iloczynu promienia r , przekroju przewodu i parametru materiałowego χ , którego odwrotność $\delta = 1/\chi$ nazywamy głębokością wnikania fali elektromagnetycznej w przewodniku.

$$k_d = \frac{\chi r}{2} + 0.25 \quad (3)$$

$$\chi = \sqrt{\pi f \sigma \mu} \quad (4)$$

– **Indukcyjność jednostkowa** – L' , którą można obliczyć ze wzoru

$$L' = \frac{\mu_o}{2\pi} \left(0.5 + 2 \ln \frac{d}{r} \right) \quad (5)$$

gdzie: d – odstęp między osiami przewodów,
 r – promień przewodu.

W przypadku dużej częstotliwości, (ze względu na małą grubość warstwy prądowej) indukcyjność jednostkową obliczamy ze wzoru,

$$L' = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{d}{r} \quad (6)$$

– **Pojemność jednostkowa** – C' , można ją obliczyć ze wzoru

$$C' = \frac{\pi \epsilon_0}{\ln \frac{d}{r}} \quad (7)$$

– **Konduktywność jednostkowa izolacji** – G' ,

Upływność linii napowietrznej jest związana z upływem prądu przez izolację linii oraz z tzw. zjawiskiem ulotu. W nowoczesnych liniach napowietrznych i kablowych izolacja w warunkach normalnej pracy linii jest tak mała, że upływ prądu może być pominięty ($G' \approx 0$).

Linie długą opisuje układ dwóch równań różniczkowych cząstkowych zwanych równaniami telegrafistów:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} &= R' i(x,t) + L' \frac{\partial i(x,t)}{\partial t} \\ -\frac{\partial i(x,t)}{\partial x} &= G' u(x,t) + C' \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \end{aligned} \quad (8)$$

W dalszym ciągu będziemy się zajmowali zjawiskami zachodzącymi w linii długiej przy napięciach i prądach sinusoidalnych. Wówczas układ równań (8) na zbiorze liczb zespolonych można zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} -\frac{d\underline{U}(x)}{dx} &= (R' + j\omega L') \underline{I}(x) \\ -\frac{d\underline{I}(x)}{dx} &= (G' + j\omega C') \underline{U}(x) \end{aligned} \quad (9)$$

Rozwiązanie układu równań różniczkowych (9) ma postać:

$$\begin{aligned} \underline{U}(x) &= \underline{A}_1 e^{-\gamma x} + \underline{A}_2 e^{\gamma x} \\ \underline{I}(x) &= \frac{1}{\underline{Z}_f} (\underline{A}_1 e^{-\gamma x} - \underline{A}_2 e^{\gamma x}) \end{aligned} \quad (10)$$

gdzie: $\underline{Z}_f = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}}$ – nazywamy impedancją falową linii [Ω],

$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')}$ – nazywamy stałą rozprzestrzeniania, stałą propagacji lub tamownością falową (jednostkową) [Np m^{-1}].

α – stała tłumienia lub tłumienność falowa, β – stała fazowa lub przesuwność falowa,

A_1, A_2 – stałe całkowania, które wyznacza się na podstawie znanych wartości \underline{U}_1 i \underline{I}_1 na początku linii ($x = 0$) lub wartości \underline{U}_2 i \underline{I}_2 na końcu linii ($x = l$).

I tak, przy zadanych wartościach na początku linii $\underline{U}(0) = \underline{U}_1$ i $\underline{I}(0) = \underline{I}_1$ rozkład napięcia i prądu (10) można przedstawić w następującej postaci

$$\begin{aligned}\underline{U}(x) &= \underline{U}_1 \operatorname{ch} \gamma x - \underline{Z}_f \underline{I}_1 \operatorname{sh} \gamma x \\ \underline{I}(x) &= -\frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_f} \operatorname{sh} \gamma x + \underline{I}_1 \operatorname{ch} \gamma x\end{aligned}\quad (11)$$

Natomiast, gdy dane są wartości na końcu linii $\underline{U}(l) = \underline{U}_2$ i $\underline{I}(l) = \underline{I}_2$, to

$$\begin{aligned}\underline{U}(x) &= \underline{U}_2 \operatorname{ch} \gamma(l-x) + \underline{Z}_f \operatorname{sh} \gamma(l-x) \\ \underline{I}(x) &= \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_f} \operatorname{sh} \gamma(l-x) + \underline{I}_2 \operatorname{ch} \gamma(l-x)\end{aligned}\quad (12)$$

Parametry falowe linii długiej (stała rozprzestrzeniania γ oraz impedancja falowa \underline{Z}_f) określają właściwości linii długiej. Wielkości te można wyznaczyć na podstawie parametrów jednostkowych, wykorzystując niżej przedstawione zależności:

$$\underline{Z}_f = Z_f e^{j\vartheta} \Rightarrow \begin{cases} Z_f = \sqrt{\frac{R'^2 + \omega^2 L'^2}{G'^2 + \omega^2 C'^2}} \\ \vartheta = \frac{1}{2} \left(\operatorname{arc\,tg} \frac{\omega L'}{R'} - \operatorname{arc\,tg} \frac{\omega C'}{G'} \right) \end{cases}\quad (13)$$

$$\gamma = \alpha + j\beta \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \sqrt{\frac{1}{2} \left[R' G' - \omega^2 L' C' + \sqrt{(R'^2 + \omega^2 L'^2)(G'^2 + \omega^2 C'^2)} \right]} \\ \beta = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\omega^2 L' C' - R' G' + \sqrt{(R'^2 + \omega^2 L'^2)(G'^2 + \omega^2 C'^2)} \right]} \end{cases}$$

Typowe wartości modułu impedancji falowej dla linii napowietrznej są rzędu 400 – 500 Ω .

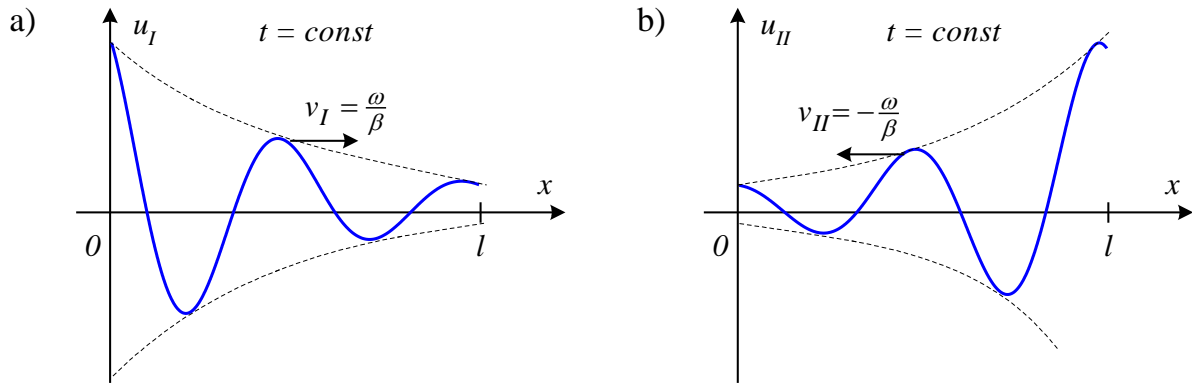
Przebiegi czasowe napięcia i prądu odpowiadające równaniom (12) można uzyskać ze wzoru:

$$\begin{aligned}u(x,t) &= \operatorname{Im} \left\{ \underline{U}(x) \sqrt{2} e^{j\omega t} \right\} = u_I(x,t) + u_{II}(x,t) \\ i(x,t) &= \operatorname{Im} \left\{ \underline{I}(x) \sqrt{2} e^{j\omega t} \right\} = i_I(x,t) + i_{II}(x,t)\end{aligned}\quad (14)$$

Przy czym składniki u_I, i_I przedstawiają falę pierwotną tj. przesuwaną się z prędkością fazową $v_I = \frac{\omega}{\beta}$ w kierunku końca linii (rys.2a).

$$\begin{aligned}u_I(x,t) &= A_I \sqrt{2} e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \beta t + \Psi_I) \\ i_I(x,t) &= \frac{A_I}{\underline{Z}_f} \sqrt{2} e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \beta x + \Psi_I - \vartheta)\end{aligned}\quad (15)$$

gdzie: $\Psi_I = \arg \underline{A}_I$, $\vartheta = \arg \underline{Z}_f$,

rys.2 Rozkład napięć u_I i u_{II} wzdłuż linii, przy $t = const$.

Natomiast u_{II} , i_{II} przedstawiają falę odbitą tzn. posuwającą się z prędkością $v_{II} = -\frac{\omega}{\beta}$ w kierunku początku linii długiej (rys.2b).

$$\begin{aligned} u_{II}(x,t) &= A_2 \sqrt{2} e^{\alpha x} \sin(\omega t + \beta x + \Psi_2) \\ i_{II}(x,t) &= \frac{A_2}{Z_f} \sqrt{2} e^{\alpha x} \sin(\omega t + \beta x + \Psi_2 - \vartheta) \end{aligned} \quad (16)$$

gdzie: $\Psi_2 = \arg \underline{A}_2$.

Długości fal przestrzennych napięcia i prądu są jednakowe i wynoszą,

$$\lambda = vT = \frac{\omega}{\beta} T = \frac{2\pi}{\beta} \quad (17)$$

Linia bezstratna

Szczególny przypadek linii długiej stanowi linia bezstratna, w której rezystancja jednostkowa R' oraz konduktancja jednostkowa izolacji G' są równe zero.

Linia bezstratna jest przypadkiem idealnym, jednakże przy dostatecznie dużych częstotliwościach uzyskujemy warunki $\omega L' \gg R'$ oraz $\omega C' \gg G'$, w związku z czym można przyjąć $R' \approx 0$ oraz $G' \approx 0$, otrzymując zależności jak dla linii bezstratnej.

Podstawiając $R' = 0$ i $G' = 0$ do wzorów na parametry falowe (13) otrzymamy

$$\underline{Z}_f = \sqrt{\frac{L'}{C'}} \quad \text{oraz} \quad \gamma = j\omega\sqrt{L'C'} \quad (18)$$

wobec tego: $\alpha = 0$ i $\beta = \omega\sqrt{L'C'}$

Podstawiając parametry falowe linii długiej bezstratnej do równań (12) i uwzględniając, że:

$$\mathbf{sh} x = j \sin x$$

$$\mathbf{ch} x = \cos x$$

otrzymamy

$$\begin{aligned} \underline{U}(x) &= \underline{U}_2 \cos \beta(l-x) + j\sqrt{\frac{L'}{C'}} \underline{I}_2 \sin \beta(l-x) \\ \underline{I}(x) &= j\sqrt{\frac{C'}{L'}} \underline{U}_2 \sin \beta(l-x) + \underline{I}_2 \cos \beta(l-x) \end{aligned} \quad (19)$$

Stąd przebiegi chwilowe napięcia i prądu wynoszą:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= U_2 \sqrt{2} \cos \frac{2\pi(l-x)}{\lambda} \sin \omega t + \sqrt{\frac{L'}{C'}} I_2 \sqrt{2} \sin \frac{2\pi(l-x)}{\lambda} \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} - \varphi \right) \\ i(x,t) &= \sqrt{\frac{C'}{L'}} U_2 \sqrt{2} \sin \frac{2\pi(l-x)}{\lambda} \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) + I_2 \sqrt{2} \cos \frac{2\pi(l-x)}{\lambda} \sin(\omega t - \varphi) \end{aligned} \quad (20)$$

Gdzie φ kąt przesunięcia fazowego między napięciem i prądem na końcu linii.

Stan jałowy bezstratnej linii długiej

Po uwzględnieniu w wyrażeniach (20) warunku dla stanu jałowego $\underline{I}_2 = 0$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= U_2 \sqrt{2} \cos \frac{2\pi(l-x)}{\lambda} \sin \omega t \\ i(x,t) &= \sqrt{\frac{C'}{L'}} U_2 \sqrt{2} \sin \frac{2\pi(l-x)}{\lambda} \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned} \quad (21)$$

Widzimy, że w stanie jałowym występują wzdłuż bezstratnej linii długiej fale stojące napięcia i prądu.

Węzłami fali stojącej nazywamy punkty, w których występują stałe wartości zerowe, natomiast **strzałkami** fali stojącej nazywamy punkty, w których występują wartości maksymalne i minimalne fali.

W rozważanym przypadku strzałki fali napięcia oraz węzły fali prądu występują w punktach $(l-x) = 2k \frac{\lambda}{4}$, natomiast w punktach $(l-x) = (2k+1) \frac{\lambda}{4}$ występują węzły fali napięcia oraz strzałki fali prądu ($k = 0, 1, 2, \dots$).

Na końcu linii bezstratnej w stanie jałowym znajduje się strzałka fali napięcia oraz węzeł fali prądu.

Stan zwarcia bezstratnej linii długiej

W stanie zwarcia napięcie na końcu linii $\underline{U}_2 = 0$. Stąd podstawiając do (20) otrzymamy:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sqrt{\frac{L'}{C'}} I_2 \sqrt{2} \sin \frac{2\pi(l-x)}{\lambda} \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \\ i(x,t) &= I_2 \sqrt{2} \cos \frac{2\pi(l-x)}{\lambda} \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (22)$$

W stanie zwarcia istnieją wzdłuż bezstratnej linii fale stojące napięcia i prądu, przy czym w punktach $(l-x) = (2k+1) \frac{\lambda}{4}$ znajdują się strzałki fali napięcia oraz węzły fali prądu, a w punktach $(l-x) = 2k \frac{\lambda}{4}$ węzły fali napięcia oraz strzałki fali prądu ($k = 0, 1, 2, \dots$).

Na końcu linii bezstratnej, w stanie zwarcia, występuje węzeł fali napięcia i strzałka fali prądu.

Linia bezstratna obciążona reaktancją

Wykorzystując, że w tym przypadku, na końcu linii $\underline{U}_2 = jX \underline{I}_2$, otrzymamy wyrażenia

$$\begin{aligned}\underline{U}(x) &= \frac{\sqrt{X^2 + Z_f^2}}{X} \underline{U}_2 \sin\left(\frac{2\pi(l-x)}{\lambda} + \Theta\right) \\ \underline{I}(x) &= \frac{\sqrt{X^2 + Z_f^2}}{X} \underline{I}_2 \cos\left(\frac{2\pi(l-x)}{\lambda} + \Theta\right)\end{aligned}\quad (23)$$

Przy czym: $\operatorname{tg} \Theta = \frac{X}{Z_f}$, $-\frac{\pi}{2} < \Theta < \frac{\pi}{2}$.

Przyjmując więc

$$\underline{U}_2 = U_2, \quad \text{oraz} \quad \underline{I}_2 = I_2 e^{-j\varphi} = -j \frac{U_2}{X}$$

otrzymamy wyrażenia na przebiegi chwilowe napięcia i prądu w dowolnym punkcie linii

$$\begin{aligned}u(x, t) &= \frac{\sqrt{X^2 + Z_f^2}}{X} U_2 \sin\left(\frac{2\pi(l-x)}{\lambda} + \Theta\right) \sin \omega t \\ i(x, t) &= \frac{\sqrt{X^2 + Z_f^2}}{X} I_2 \cos\left(\frac{2\pi(l-x)}{\lambda} + \Theta\right) \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}\quad (24)$$

Stwierdzamy zatem, że w linii bezstratnej, obciążonej reaktancją, występują również fale stojące napięcia i prądu, posiadające węzły (strzałki) odpowiednio w punktach:

$$\begin{aligned}(l-x) &= 2k \frac{\lambda}{4} - \frac{\Theta}{2\pi} \lambda && \text{– węzły napięcia i strzałki prądu;} \\ (l-x) &= (2k+1) \frac{\lambda}{4} - \frac{\Theta}{2\pi} \lambda && \text{– strzałki napięcia i węzły prądu;}\end{aligned}$$

Linia bezstratna obciążona impedancją falową

Gdy linia bezstratna obciążona jest odbiornikiem rezystancyjnym, dopasowanym falowo ($R_f = \underline{Z}_f = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$), wówczas wyrażenia (19) przyjmują postać:

$$\begin{aligned}\underline{U}(x) &= \underline{U}_2 e^{j\beta(l-x)} \\ \underline{I}(x) &= \frac{\underline{U}_2}{R_f} e^{j\beta(l-x)}\end{aligned}\quad (25)$$

Stąd otrzymujemy przebiegi chwilowe napięcia i prądu

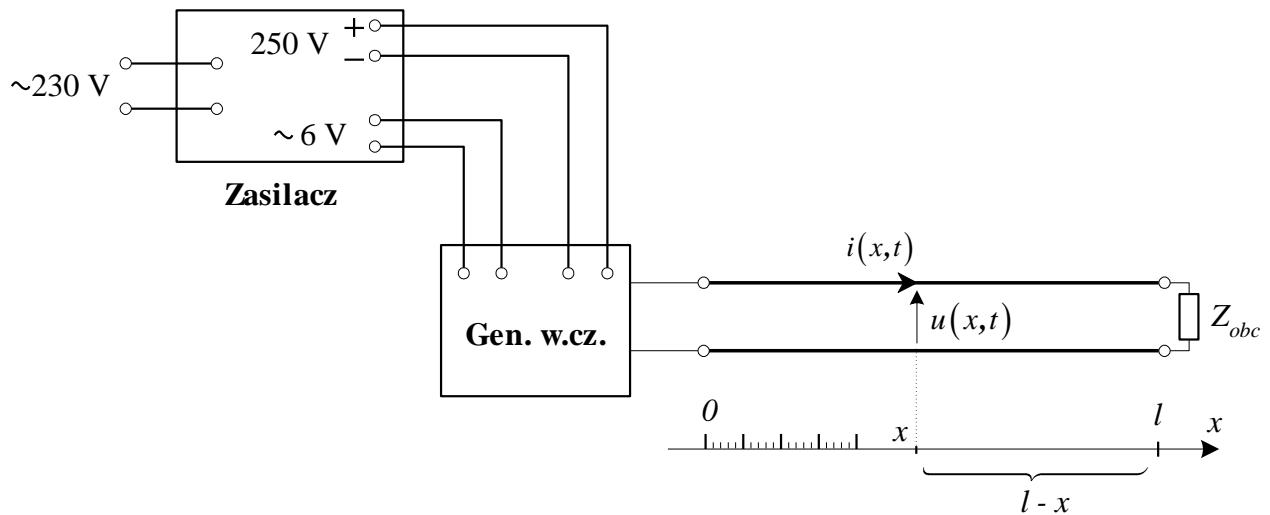
$$\begin{aligned}u(x, t) &= U_2 \sqrt{2} \sin[\omega t + \beta(l-x)] \\ i(x, t) &= \frac{U_2}{R_f} \sqrt{2} \sin[\omega t + \beta(l-x)]\end{aligned}\quad (26)$$

Jest to równanie fali o stałej amplitudzie. W tym przypadku oczywiście fala stojąca nie wystąpi.

4. Eksperyment.

Opis stanowiska pomiarowego

Na rys.3 przedstawiono schemat urządzenia pomiarowego składającego się z modelu linii dwuprzewodowej i generatora wysokiej częstotliwości.



rys.3 Schemat urządzenia pomiarowego:

Model linii długiej wykonany jest z prętów miedzianych, ułożonych równolegle. Linia sprzężona jest indukcyjnie z generatorem wysokiej częstotliwości.

Do badania przestrzennego rozkładu napięcia i prądu wzdłuż linii długiej zastosowano następujące wskaźniki:

1. Wskaźnik wychyłowy – mikroamperomierz z dioda germanową, zasilany z linii poprzez styki ślizgowe i dzielnik napięcia.
2. Wskaźnik prądu działający jako przekładnik prądowy w postaci pętli sprzężonej indukcyjnie z przewodami linii, obciążony na końcu żarówką.
3. Wskaźnik napięcia, również w postaci żarówki zasilanej przez sprzężenie pojemnościowe z linią.

5. Program ćwiczenia.

1. Wzbudzenie generatora wysokiej częstotliwości przez włączenie do sieci jego zasilacza.

Uwaga!

Przed włączeniem zasilacza lampowego sprawdź czy napięcie anodowe jest wyłączone. Włącz zasilacz. Odczekaj kilka minut, w celu rozgrzania katody lampy i dopiero teraz można włączyć napięcie anodowe.

Prąd anodowy nie powinien przekroczyć wartości 50 mA.

Wyłączanie zasilacza lampowego powinno odbywać się w odwrotnej kolejności.

2. Pomiar częstotliwości generatora.

Pomiar częstotliwości generatora dokonujemy w stanie jałowym linii długiej. Należy zbliżyć pętlę falomierza absorpcyjnego do linii tak, aby uzyskać sprzężenie z linią. Następnie nastawić przełącznik zakresów na odpowiedni zakres i obracając pokrętkę doprowadzić do maksymalnego wychylenia wskazówki przyrządu. Zanotować odczytaną częstotliwość f .

3. Określenie parametrów linii długiej.

3.1 Parametry geometryczne.

Przy pomocy suwmiarki określić średnicę przewodów ($2r$) oraz odstęp między nimi (d). Zmierzyć długość linii (l).

3.2 Parametry jednostkowe.

Określić parametry jednostkowe linii długiej (R' , L' , C'), przyjmując konduktywność mosiądku $\sigma = 1.5 \cdot 10^7 \Omega^{-1} m^{-1}$, przenikalność względną $\mu_r = 1$ oraz głębokości wnikania fali elektromagnetycznej przy wysokiej częstotliwości $\delta = 1.025 \cdot 10^{-5} m$.

Przyjąć konduktancję izolacji G' równa zero. Sprawdzić czy spełnione są warunki, aby badany model traktować jako linię bezstratną.

3.3 Parametry falowe.

Z obliczonych parametrów jednostkowych określić parametry falowe linii długiej oraz: Z_f , α , β , ω , λ , v . Uzyskane wyniki wpisać do tabeli 1.

Tab.1 Parametry linii długiej.

f	r	d	l	R'	L'	C'	$\omega L'$	$\omega C'$	Z_f	α	β	v	λ
Hz	mm	mm	m	Ω/m	H/m	F/m	Ω/m	$\Omega^{-1} m^{-1}$	Ω	(*)/m	rad/m	m/s	m

$$(*) Np \text{ lub } dB, \quad \alpha_{[Np]} = \ln \frac{Y_1}{Y_2}, \quad \alpha_{[dB]} = 20 \log \frac{Y_1}{Y_2}, \quad 1 Np = (20 \log e) dB \approx 8.686 dB$$

4. Badanie linii długiej w stanie jałowym.

Wykorzystując wskaźnik napięciowy i prądowy ustalić położenie węzłów i strzałek stojącej fali napięcia i prądu względem końca linii. Przy pomocy miernika wskazówkowego określić rozkład wartości względnych napięcia wzdłuż linii. Wyniki wpisać do tabeli 2.

Tab.2 Badanie linii długiej w stanie jałowym, zwarcia i obciążonej pojemnością.

L.p.	Stan jałowy				Stan zwarcia				Obciążenie pojemnościowe.			
	$l-x$	α	wskaźnik		$l-x$	α	wskaźnik		$l-x$	α	wskaźnik	
	cm	dz	nap	prąd	cm	dz	nap	prąd	cm	dz	nap	prąd

5. Badanie linii długiej w stanie zwarcia.

Założyć zwieracz na końcu linii. Wykonać pomiary analogicznie jak w punkcie 4. Wyniki wpisać do tabeli 2.

6. Badanie linii długiej obciążonej pojemnością.

Obciążyć linię długą na końcu pojemnością C . Zmierzyć pojemność kondensatora mostkiem RLC . Obliczyć reaktancję kondensatora i porównać z impedancją falową linii długiej.

Pomiary wykonać analogicznie jak w punkcie 4. Wyniki wpisać do tabeli 2. Określić wartości przesunięcia położenia strzałek i węzłów stojącej fali napięcia i prądu względem ich położenia w stanie jałowym. Porównać uzyskany wynik z przewidywaniami teoretycznymi.

Uwaga!

Pomiary wykonywać możliwie szybko i sprawnie tak, aby nie przeciążyć generatora wysokiej częstotliwości.

6. Pytania sprawdzające.

1. Jakie warunki decydują, że obwód elektryczny traktujemy jak linię długą ?
2. Napisać równania telegrafistów dla wartości chwilowych i zespolonych.
3. Dlaczego badany model linii długiej możemy traktować jako model linii bezstratnej ?
4. Napisać ogólne rozwiązanie równań telegrafistów dla przebiegów sinusoidalnych oraz scharakteryzować jego poszczególne składniki.
5. Zdefiniować parametry jednostkowe oraz falowe linii długiej.
6. W jakich warunkach powstają fale stojące napięcia i prądu w linii długiej bezstratnej. Dlaczego w linii długiej obciążonej impedancją falową fala stojąca nie wystąpi ?

Uwagi dotyczące instrukcji proszę zostawić przy stanowisku pomiarowym.

Uwagi dotyczące ćwiczenia:

Laboratorium Elektrotechniki Teoretycznej
Teoria Obwodów 2
ELR021303L

Temat ćwiczenia:

Wzmacniacz magnetyczny

Instytut Podstaw Elektrotechniki i Elektrotechnologii -



Zakład Elektrotechniki Teoretycznej



1. Cel ćwiczenia.

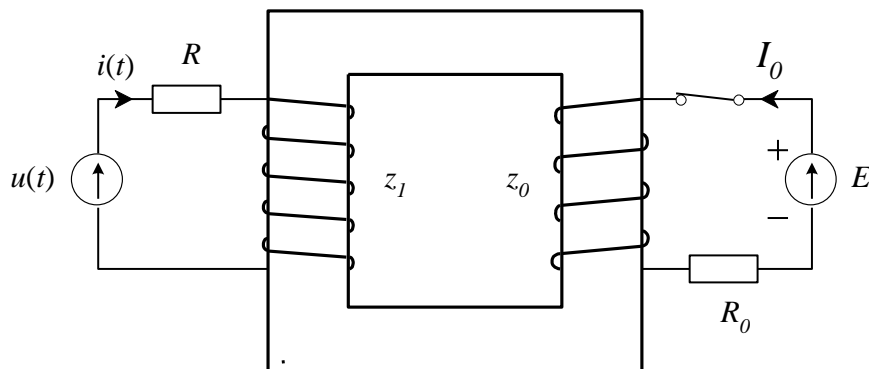
Celem ćwiczenia jest eksperymentalne badanie podstawowych własności wzmacniacza magnetycznego: wyznaczanie charakterystyk magnesowania obwodu ferromagnetycznego zasilanego napięciem sinusoidalnym przy jednoczesnym podmagnesowaniu prądem stałym I_0 , wykorzystanie dla uzyskania efektu wzmocnienia mocy.

2. Podstawy teoretyczne.

W obwodzie ferromagnetycznym zależność między strumieniem skojarzonym Ψ a wywołującym go prądem $i(t)$ w uzwojeniu jest nieliniowa, co powoduje odkształcenie krzywej prądu $i(t)$ przy zasilaniu napięciem sinusoidalnym (lub odwrotnie). W przebiegach odkształconych dominującą rolę odgrywa harmoniczna podstawowa, wobec czego wprowadza się pojęcie zastępczej sinusoidy o takiej wartości skutecznej, jaką ma badana wielkość niesinusoidalna. To ułatwia bardzo obliczenia, pozwala na stosowanie metody symbolicznej oraz wykresów wektorowych, daje wyniki prawidłowe pod względem jakościowym i z wystarczającą dokładnością pod względem ilościowym. W związku z tym wprowadza się też pojęcie zastępczej indukcyjności dławika L_{dt} określonej stosunkiem zmian strumienia skojarzonego $\Delta\Psi$ do zmian prądu Δi , odpowiadających wierzchołkom pętli histerezy zakreślonej w ciągu okresu.

$$L_{dt} \approx \frac{\Delta\Psi}{\Delta i} \quad (1)$$

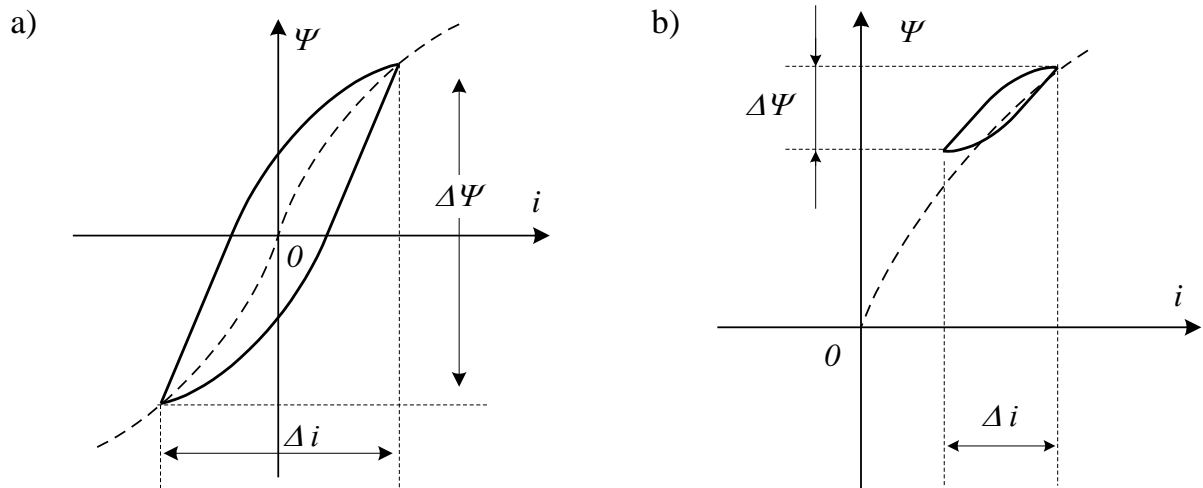
Indukcyjność zastępczą dławika można zmieniać stosując podmagnesowanie magnetowodu prądem stałym. Dlatego nazywa się ją też indukcyjnością sterowaną, a prąd podmagnesowujący – prądem sterującym.



rys.1

Na rys.1 przedstawiono obwód magnetyczny o dwóch uzwojeniach: uzwojeniu roboczym (z_1) zasilanym prądem sinusoidalnym oraz uzwojeniu sterującym (z_0). Przy braku magnesowania indukcyjność zastępcza $\Delta\Psi/(\Delta i)$ jest większa (rys.2a) niż przy podmagnesowaniu (rys.2b). Im większy jest prąd sterujący tym mniejsza jest indukcyjność zastępcza.

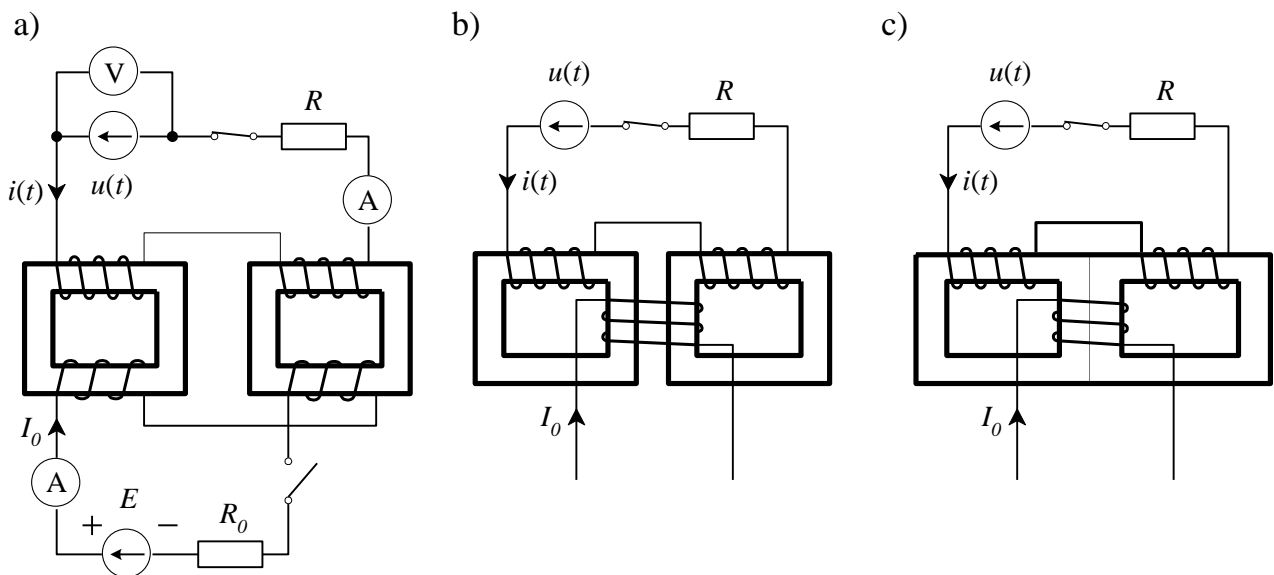
Jeżeli w szereg z uzwojeniem roboczym jest włączony odbiornik o rezystancji R , to przy danej wartości skutecznej napięcia zasilającego prąd w odbiorniku wzrasta ze wzrostem prądu podmagnesującego, jednak małym przyrostom mocy w uzwojeniu sterującym odpowiadają wielokrotnie większe przyrosty mocy w odbiorniku.



rys. 2

Zjawisko to nazywamy efektem wzmocnienia mocy. Towarzyszy mu jeszcze inny niepożądany, tzw. efekt transformatorowy, polegający na tym, że uzwojenie sterujące spełnia niejako rolę uzwojenia wtórnego transformatora, przy czym napięcie indukowane w nim może nawet być większe niż napięcie zasilające (gdy $z_0 > z_1$).

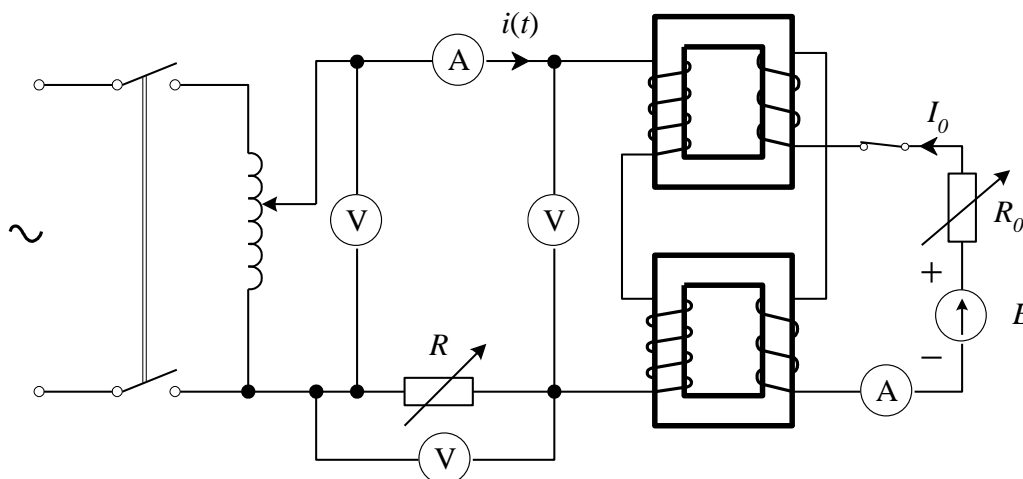
Najprostszy wzmacniacz magnetyczny składa się z dwóch jednakowych dławików sterowanych, których uzwojenia robocze połączone są w szereg zgodnie, a uzwojenia sterujące przeciwsobnie w celu uniknięcia wspomnianego efektu transformatorowego (rys. 3a). Dzięki przeciwsobnemu połączeniu indukowane w uzwojeniach sterujących napięcia znoszą się, tak, że w obwodzie sterującym nie ma składowej zmiennej prądu.



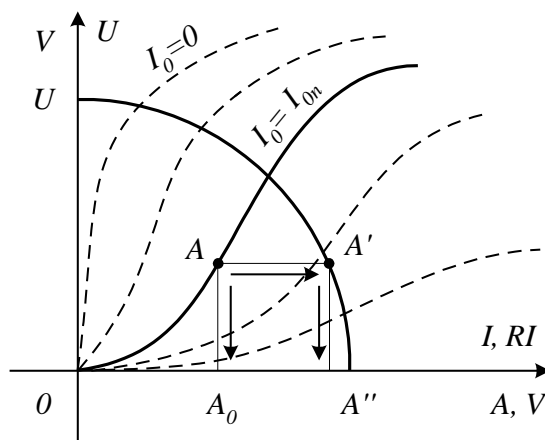
rys.3

Jeszcze korzystniejsze jest wspólne uzwojenie sterujące dla obu rdzeni (rys.3b) albo jeden wspólny rdzeń płaszczywy (rys.3c), bo wtedy unika się wyindukowania napięcia w uzwojeniu sterującym.

Podstawą analizy pracy wzmacniacza magnetycznego są charakterystyki magnesowania wyrażone zależnością między wartościami skutecznymi napięcia U i prądu I przy różnych wartościach prądu podmagnesującego $I_0 = const.$ Ze względu na swój kształt otrzymały one nazwę krzywych S (rys.5). Wyznacza się je zasilając uzwojenia robocze wzmacniacza napięciem sinusoidalnym nastawianym za pomocą autotransformatora (rys.4).



rys.4



rys.5

Podstawową cechą charakteryzującą wzmacniacz magnetyczny jest współczynnik wzmocnienia mocy k_p , wyrażony stosunkiem przyrostu mocy w odbiorniku, wywołanego prądem podmagnesującym do mocy straconej w uzwojeniu podmagnesującym (sterującym).

$$k_p = \frac{R(I^2 - I_{min}^2)}{R_0 I_0^2} \quad (2)$$

Przy czym:

I, I_{min} – prąd w odbiorniku przy podmagnesowaniu i bez podmagnesowania,

I_0 – prąd sterujący,

R – rezystancja odbiornika

R_0 – rezystancja uzwojenia sterującego.

Rezystancję uzwojenia roboczego, jako wielokrotnie mniejszą od rezystancji odbiornika pomijamy w obliczeniach przybliżonych.

Współczynnik wzmocnienia k_p danego wzmacniacza zależy od napięcia zasilającego U i od rezystancji R odbiornika. Optymalna wartość rezystancji R_{opt} odbiornika, przy danym napięciu zasilającym U oraz znamionowym prądzie sterującym I_0 , jest to taka wartość, przy której moc w odbiorniku jest największa.

W celu wyznaczenia optymalnej wartości R kreślimy krzywą S odpowiadającą znamionowemu prądowi sterującemu I_{on} i okrąg o promieniu odpowiadającym w przyjętej podziałce napięciu U (rys.5). Obieramy na charakterystyce dowolny punkt A wewnątrz okręgu. Jego odcięta OA_0 przedstawia w przyjętej podziałce prądowej prąd I , a rzędna A_0A – napięcie na wzmacniaczu. Przenosimy rzędną $A_0A = A'A''$ na okrąg; odcięta OA' przedstawia w podziałce napięciowej spadek napięcia na odbiorniku RI przy pominięciu rezystancji uzwojenia roboczego. Z prądu I oraz napięcia RI obliczamy moc odbiornika $P = RI^2$, a następnie kreślimy krzywą $P = f(I)$. Odczytawszy na niej moc maksymalną P_{max} i odpowiadający jej prąd I obliczamy optymalną wartość rezystancji odbiornika.

$$R_{opt} = \frac{P_{max}}{I^2} \tag{2}$$

W praktyce jest stosowana powszechnie charakterystyka sterowania $I = I(I_0)$ przy danym napięciu zasilającym i danej rezystancji odbiornika. W celu wyznaczenia jej posłużymy się związkiem między napięciami.

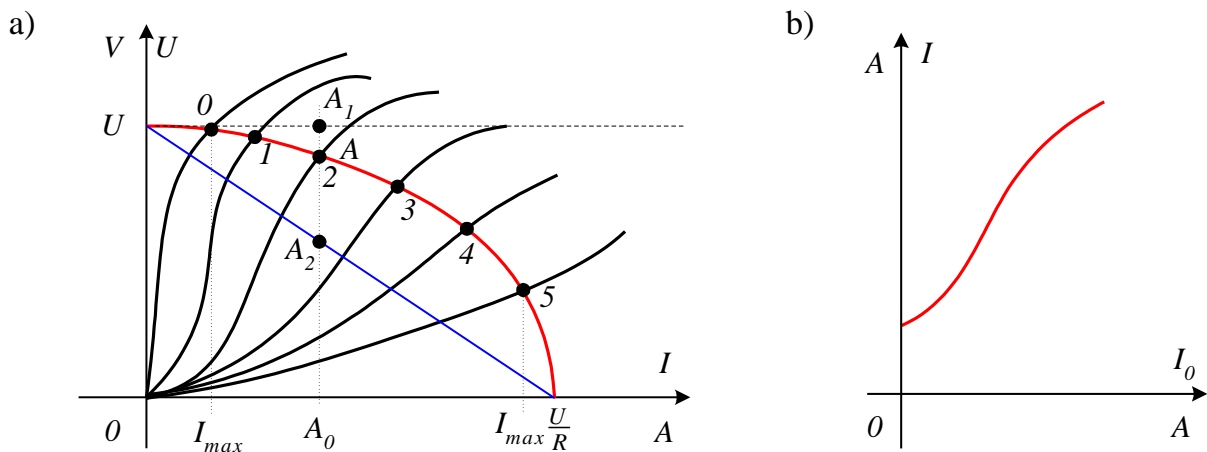
$$(RI)^2 + U_L^2 = U^2 \tag{3}$$

który po przekształceniu prowadzi do równania elipsy.

$$\frac{I^2}{\left(\frac{U}{R}\right)^2} + \frac{U_L^2}{U^2} = 1 \tag{4}$$

o osi U na osi rzędnych i U/R na osi odciętych.

Elipsa ta przecina krzywe S danego wzmacniacza w punktach 0, 1, 2, 3 ... (rys. 6a) wyznaczających pary odpowiadających sobie wartości I, I_0 , które służą za podstawę do wykreślenia charakterystyki sterowania $I = I(I_0)$, jak pokazano na rys.6b.



rys.6

Stosunek największej do najmniejszej wartości prądu roboczego przedstawia krotność sterowania prądowego. Z rysunku 6a można dla dowolnego prądu sterowania I_0 odczytać bezpośrednio napięcie U_L na dławiku (rzędna A_0A) oraz napięcie na odbiorniku RI (odcinek A_1A_2) przy czym punkt A_2 leży na prostej łączącej końce osi elipsy, a rzędna A_0A_1 odpowiada napięciu zasilającemu U .

3. Opis urządzenia pomiarowego

Przedmiotem badania jest wzmacniacz dwurdzeniowy o oddzielonych uzwojeniach sterujących (rys.3). Uzwojenia robocze są tak dobrane, że w połączeniu szeregowym mogą być zasilane napięciem nie przekraczającym 220V. Uzwojenia sterujące, połączone szeregowo, są zasilane ze źródła napięcia stałego $E = 6 V$.

Przy wyznaczaniu charakterystyk magnesowania zasilają się uzwojenia robocze napięciem nastawnym za pomocą autotransformatora laboratoryjnego o płynnej nastawności.

Mierzy się napięcie zasilające, prąd roboczy, prąd sterujący, a przy wyznaczaniu charakterystyki pracy wzmacniacza razem z odbiornikiem, mierzy się jeszcze napięcia na wzmacniaczu i na odbiorniku. Pomiar napięcia na odbiorniku jest zbędny, gdy odbiornik jest opornikiem o znanej rezystancji. Jako odbiornik o żądanej rezystancji R może być użyty opornik suwakowy.

4. Program ćwiczenia

1. Odnotować dane techniczne wzmacniacza, wymiary rdzenia, liczby zwojów uzwojeń, z_1 roboczego i z_0 sterującego, rezystancję uzwojeń R_1, R_0 .

Na podstawie liczby zwojów z_1 i przekroju rdzenia obliczyć potrzebny zakres nastawialności napięcia na autotransformatorze przyjmując $B_m = 1.45 T$.

2. Zmontować układ połączeń według schematu na rys.4 do wyznaczania krzywych S wzmacniacza. Wykonać pomiary $U = U(I)$ (przy $R = 0$) dla 6 różnych wartości prądu sterującego I_0 , od $I_0 = 0$ począwszy, według wskazówek prowadzącego ćwiczenie.

Dla każdej wartości I_0 wyznaczyć przynajmniej 6 punktów charakterystyki $U = U(I)$.

Wyniki pomiarów wpisać do tabeli 1.

Tab.1 Charakterystyki $U = U(I)$ wzmacniacza przy $I_0 = const$.

$I_0 = 0$	U	V								
	I	A								
$I_0 = 0.1 A$	U	V								
	I	A								
$I_0 = 0.2 A$	U	V								
	I	A								

3. W układzie (rys.4) nastawić wartości napięcia zasilającego U oraz prądu sterującego I_0 według wskazówek prowadzącego ćwiczenie. Wyznaczyć doświadczalnie optymalną w danych warunkach rezystancją odbiornika. Jako odbiornik przyjąć opornik suwakowy. Wyniki pomiarów wpisać do tabeli 2.

Tab.2 Dobór optymalnego obciążenia rezystancyjnego wzmacniacza.

L.p.	U	I_0	U_R	I	$R = \frac{U_R}{I}$	$P = U_R I$	Uwagi
	V		V	A	Ω	W	
1.							$P_{max} = \dots$ $R_{opt} = \dots$
2.							
3.							

4. Przyjąć taką samą wartość napięcia zasilającego, jak w p. 3, nastawić rezystancję odbiornika na R_{opt} i wyznaczyć charakterystykę pracy wzmacniacza w zależności od prądu sterującego. Wyniki wpisać do tabeli 3.

Tab.3 Charakterystyka sterowania wzmacniacza magnetycznego

$U = \dots V = const$ $R = \dots \Omega$	I_0	A								
	I	A								
	U_L	V								
	k_p	-								

5. Włączyć jako odbiornik grupę żarówek i zaobserwować pracę wzmacniacza przy $R \neq const$, mierząc I_0 , I , U_R . Wyniki wpisać do tabeli 4.

Tab.4

$U = \dots V = const$ $R = \dots \Omega$	I_0	A								
	I	A								
	U_R	V								
	k_p	-								

5. Opracowanie sprawozdania

1. Podać krótki opis przedmiotu badań, zamieścić potrzebne schematy pomiarowe i dane wzmacniacza.
2. Wykreślić charakterystyki $U_L = U_L(I)$ przy różnych wartościach I_0 według wyników pomiaru p. 4.2.
3. Na podstawie charakterystyk z p. 5.2 wyznaczyć, przy przyjęciu wartości napięcia zasilającego i prądu sterującego jak w p. 4.3, optymalną wartość rezystancji metodą opisaną w p. 4.2 (rys.5). Zamieścić potrzebną do wykreślenia $P = P(I)$ tabelę odczytanych z charakterystyk wartości I , RI oraz obliczonych wartości $P = RI^2$. Wykonać wykres $P = P(I)$ i zanotować maksymalną wartość mocy P oraz odpowiadającą jej wartość R_{opt} . Obliczyć współczynnik wzmocnienia k_p przy $R = R_{opt}$. Porównać wyznaczoną teoretycznie wartość R_{opt} z wartością otrzymaną z pomiaru w p. 4.3.
4. Na podstawie pomiarów w p. 4.4 wykreślić charakterystykę $U_L = U_L(I)$ przy danym obciążeniu na tym samym wykresie, co charakterystyki samego wzmacniacza bez obciążenia (p. 5.2). Wykreślić także teoretyczną charakterystykę w postaci elipsy o osiach U , U/R_{opt} . Porównać obie charakterystyki.
Uzupełnić tabelę 3 obliczonymi według wzoru (2) wartościami współczynnika wzmocnienia k_p na podstawie zmierzonych wartości I_0 i znanej rezystancji R_0 .
5. Wyznaczyć na podstawie wyników w p. 5.4 charakterystykę sterowania wzmacniacza $I = I(I_0)$ przy $R = const$, $U = const$.
6. Przedstawić krótko wnioski z pomiarów w p. 4.5.

6. Pytania sprawdzające.

1. Na czym opiera się zasada działania wzmacniacza magnetycznego ?
2. Co to jest indukcyjność "zastępcza" dławika podmagnesującego prądem stałym ? Jak zależy ona od prądu podmagnesowania ?
3. Dlaczego w układzie wzmacniacza stosujemy dwa dławiki i jak się łączy ich uzwojenia robocze oraz sterujące ?
4. Jaką zaletę ma wzmacniacz magnetyczny o wspólnym uzwojeniu sterującym, albo wzmacniacz o rdzeniu płaszczywym ? Jak należy umieszczać i łączyć uzwojenia przy rdzeniu płaszczywym ?
5. Co to są krzywe S i jak się je wyznacza ?
6. Co nazywamy współczynnikiem wzmocnienia k_p ?
7. Jak wyznaczamy optymalną rezystancję odbiornika przy danych U , I_0 ?
8. Co to jest charakterystyka sterowania wzmacniacza przy $R = const$, $U = const$?
9. Opisać teoretyczny i eksperymentalny sposób wyznaczania charakterystyki sterowania.

Uwagi dotyczące ćwiczenia:

Laboratorium Elektrotechniki Teoretycznej
Teoria Obwodów 2
ELR021303L

Temat ćwiczenia:

**Badanie stanu przejściowego
w obwodzie RLC**

Instytut Podstaw Elektrotechniki i Elektrotechnologii -

Zakład Elektrotechniki Teoretycznej



1. Cel i zakres ćwiczenia.

Celem ćwiczenia jest eksperymentalne badanie stanu przejściowego w prostych obwodach elektrycznych I-go i II-go rzędu złożonych z gałęzi RL , RC i RLC .

Przedmiotem analizy są przebiegi czasowe prądów i napięć w ww. układach, stanowiące reakcję na przeprowadzaną w obwodzie komutację polegającą m.in. na włączaniu napięcia stałego bądź też zwieraniu wybranych gałęzi obwodu.

2. Opis podstawowych układów I-go i II-go rzędu.

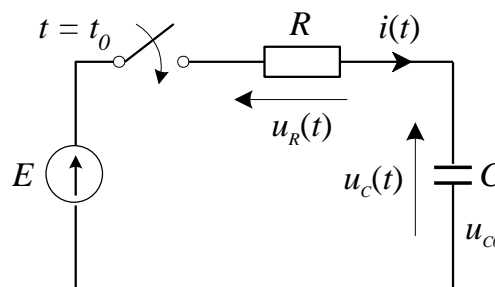
2.1. Szeregowa gałąź RC

2.1.1. Załączanie gałęzi RC na napięcie stałe

W układzie przedstawionym na rys.1, w czasie $t = t_0$ zostaje zamknięty wyłącznik. Zakładając, że w chwili komutacji ($t = t_0^-$) napięcie na kondensatorze wynosiło u_{c0} , wyznaczone zostaną przebiegi napięcia na $u_c(t)$ oraz prądu $i(t)$ dla $t > t_0$.

Wykorzystując II – prawo Kirchhoffa (napięciowe) wraz z zależnościami prądowo – napięciowymi dla elementów R i C , otrzymujemy układ równań (1),

$$\begin{aligned} u_R(t) + u_c(t) &= E \\ u_R(t) &= Ri(t) \\ i(t) &= C \frac{du_c(t)}{dt} \end{aligned} \quad (1)$$



rys.1

którego rozwiązanie, względem $u_c(t)$, prowadzi do równania różniczkowego I-go rzędu

$$RC \frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) = E \quad (2)$$

Gdy $R > 0$ w obwodzie spełnione jest prawo komutacji (p. str.5)

$$u_c(t_0+) = u_c(t_0-) = u_{c0} \quad (3)$$

Poszukiwane przebiegi są następujące

$$u_c(t) = E + (u_{c0} - E) \cdot e^{-\frac{t-t_0}{RC}} \quad \Rightarrow \quad i(t) = \frac{(E - u_{c0})}{R} \cdot e^{-\frac{t-t_0}{RC}} \quad (4),(5)$$

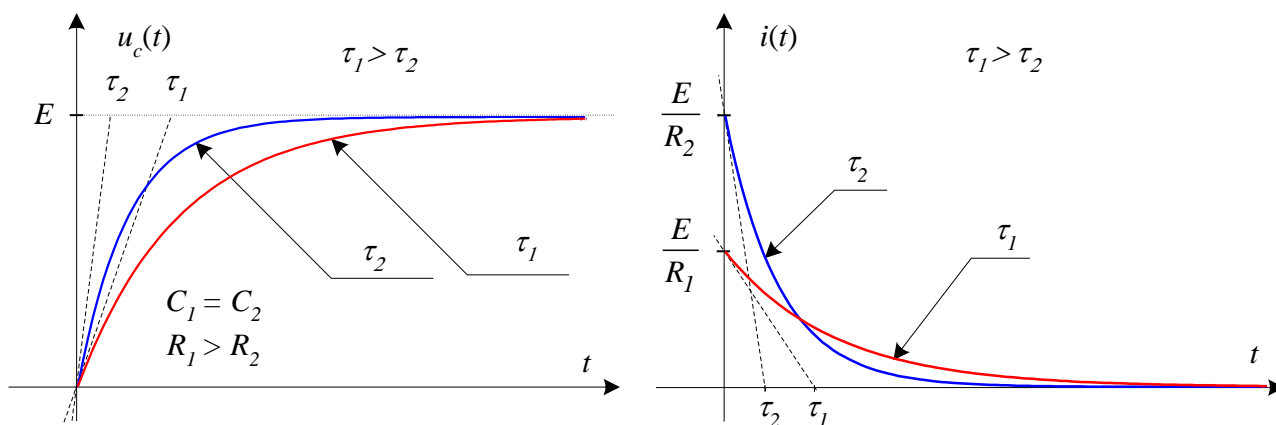
W szczególnym przypadku, gdy $t_0 = 0$ i $u_{c0} = 0$, związki (4), (5) przyjmują postać

$$u_c(t) = E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right), \quad i(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{Q}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (6),(7)$$

gdzie: $\tau = RC$ nazywamy stałą czasową gałęzi RC ;

$Q = CE$ - ładunek elektryczny odpowiadający "całkowitemu" naładowaniu kondensatora ;

Na rys.2 przedstawione są przykładowe przebiegi napięcia na kondensatorze oraz prądu w gałęzi RC, dla różnych stałych czasowych.



rys.2

2.1.2. Zwarcie gałęzi RC

Równanie dla obwodu z rys.3 otrzymujemy podstawiając w zależności (2) $E = 0$

$$RC \frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) = 0 \tag{8}$$

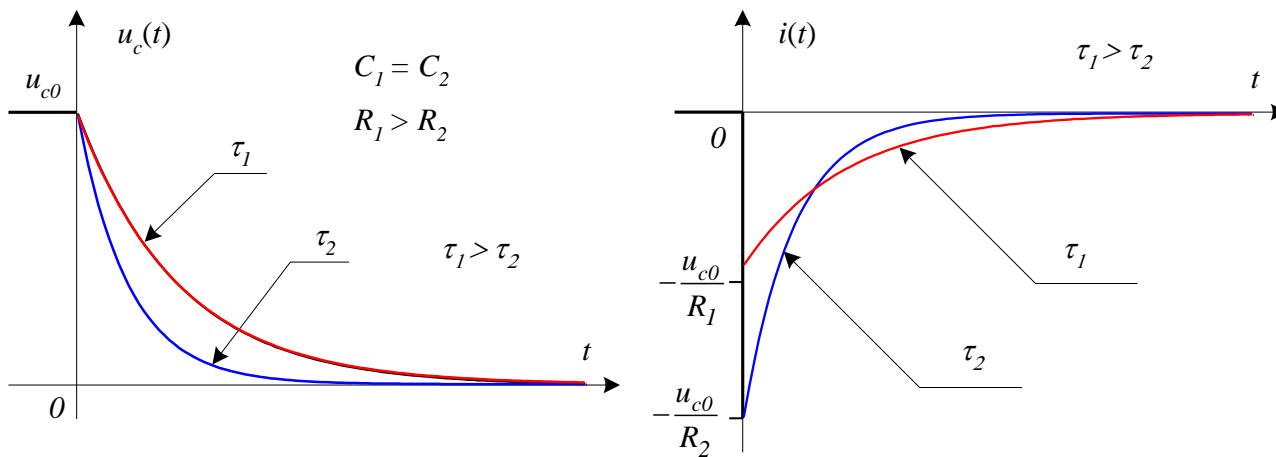
Przebiegi napięcia $u_c(t)$ oraz prądu $i(t)$ są więc następujące

$$u_c(t) = u_{c0} \cdot e^{-\frac{t-t_0}{RC}} = u_{c0} \cdot e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} \tag{9}$$

$$i(t) = -\frac{u_{c0}}{R} \cdot e^{-\frac{t-t_0}{RC}} = -\frac{Q_0}{\tau} \cdot e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} \tag{10}$$

gdzie: $Q_0 = C \cdot u_{c0}$

Przykładowe wykresy przebiegów (9), (10), dla $t_0 = 0$, mają postać



rys.4

2.2. Szeregowa gałąź RL

2.2.1. Załączanie gałęzi RL na napięcie stałe

W obwodzie przedstawionym na rys.5, prąd płynący przez cewkę, dla $t < t_0$, równy jest prądowi źródłowemu. Po zamknięciu wyłącznika, przebieg prądu w gałęzi RL zależy będzie tylko od wartości napięcia źródłowego E . Źródło prądowe służy, w tym przypadku, jedynie do ustalenia warunku początkowego w czasie $t = t_0$.

Dla $t > t_0$ równania dla obwodu mają postać:

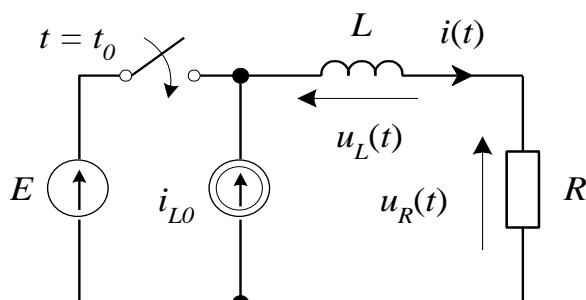
$$u_R(t) + u_L(t) = E \quad (11)$$

$$u_R(t) = Ri(t)$$

$$u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

Stąd otrzymujemy:

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = E \quad (12)$$



rys.5

Wykorzystując prądowe prawo komutacji,

$$i(t_0+) = i(t_0-) = i_{L0} \quad (13)$$

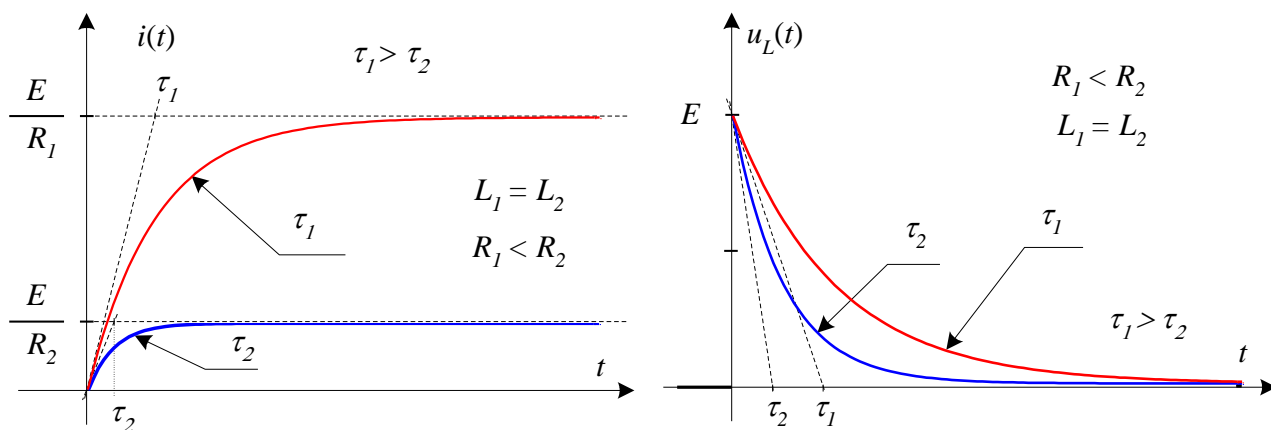
rozwiązanie równania (12), można przedstawić następująco

$$i(t) = \frac{E}{R} + \left(i_{L0} - \frac{E}{R} \right) \cdot e^{-\frac{R}{L}(t-t_0)} \Rightarrow u_L(t) = (E - Ri_{L0}) \cdot e^{-\frac{R}{L}(t-t_0)} \quad (14),(15)$$

W szczególności, gdy $t_0 = 0$ oraz $i_{L0} = 0$ otrzymujemy przebiegi:

$$i(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) = \tau \frac{E}{L} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right), \quad u_L(t) = E e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (16),(17)$$

gdzie: $\tau = \frac{L}{R}$ - stała czasowa gałęzi szeregowej RL;



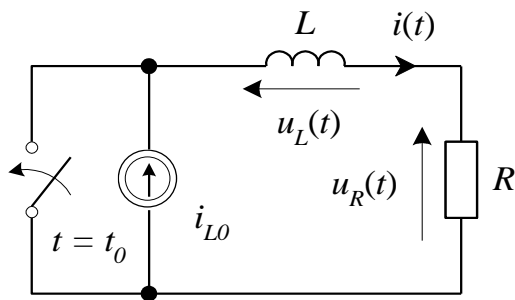
rys.6

2.2.2. Zwarcie gałęzi RL

Równanie opisujące zwarcie w gałęzi RL (rys.7) tworzymy podstawiając w równaniu (12) $E = 0$

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = 0 \quad (18)$$

Podobnie jak poprzednio źródło prądowe spełnia rolę pomocniczą – ustala warunek początkowy dla $t = t_0$



rys.7

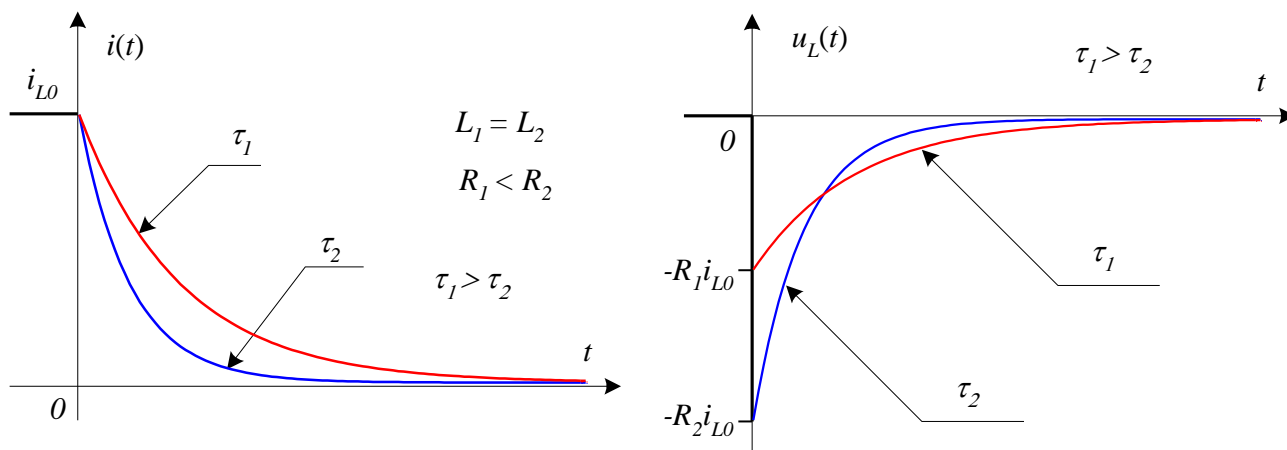
Na podstawie (14), (15) rozwiązanie równania (18) można zapisać następująco

$$i(t) = i_{L0} \cdot e^{-\frac{R}{L}(t-t_0)} \Rightarrow u_L(t) = -Ri_{L0} \cdot e^{-\frac{R}{L}(t-t_0)} \quad (19),(20)$$

W szczególności dla $t_0 = 0$ otrzymujemy

$$i(t) = i_{L0} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad u_L(t) = -Ri_{L0} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (21),(22)$$

Przykładowe wykresy powyższych przebiegów przedstawiono na rys.8



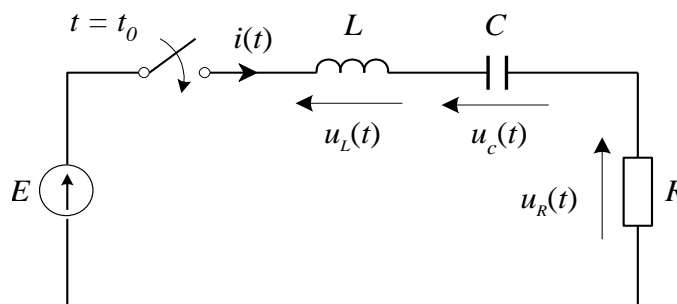
rys.8

2.3. Szeregowa gałąź RLC

2.3.1. Załączanie gałęzi RLC na napięcie stałe

Dla obwodu przedstawionego na rys.9 można napisać następujące równania

$$\begin{aligned} u_L(t) + u_R(t) + u_C(t) &= E \\ u_R(t) &= Ri(t) \\ u_L(t) &= L \frac{di(t)}{dt} \\ u_C(t) &= \frac{1}{C} \int i(t) dt \end{aligned} \quad (23)$$



rys.9

Po uwzględnieniu w pierwszym wyrażeniu (23) pozostałych związków, otrzymujemy

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt = E \quad (24)$$

Przekształcając dalej, doprowadzamy wyrażenie (24) do równania różniczkowego,

$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{LC} i(t) = 0 \quad (25)$$

którego pełne rozwiązanie wymaga wprowadzenia w czasie $t = t_0+$ dwóch warunków początkowych, w tym przypadku są to warunki w postaci wartości prądu i jego pochodnej.

Problem wyznaczania warunków początkowych w obwodach elektrycznych związany jest z zagadnieniem ciągłości energii zgromadzonej w obwodzie, za pośrednictwem takich elementów, jak indukcyjność i pojemność. Ponieważ,

$$W_L(t) = \frac{1}{2} Li_L^2(t), \quad W_C(t) = \frac{1}{2} Cu_c^2(t) \quad (26)$$

to ciągłość energii wymaga ciągłości napięć na kondensatorach oraz ciągłości prądów płynących przez indukcyjności, w dowolnym czasie oraz w każdych warunkach pracy obwodu, w tym także przed i po komutacji. Jeżeli więc w czasie $t = t_0$ zostaje przeprowadzona w obwodzie komutacja to

$$u_c(t_0+) = u_c(t_0-), \quad i_L(t_0+) = i_L(t_0-) \quad (27)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} u_c(t_0+) &= \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} u_c(t_0 + \varepsilon), \quad u_c(t_0-) = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} u_c(t_0 - \varepsilon) \\ i_L(t_0+) &= \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} i_L(t_0 + \varepsilon), \quad i_L(t_0-) = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} i_L(t_0 - \varepsilon) \end{aligned} \quad (28)$$

Związki (25) nazywa się prawami komutacji - są one spełnione w każdym rzeczywistym obwodzie.

W analizie teoretycznej rozważa się także obwody, w których prawa komutacji (27) nie mogą być wykorzystane, ponieważ wyznaczone na ich podstawie prądy lub napięcia nie spełniałyby praw Kirchhoffa. Z takimi przypadkami mamy do czynienia wówczas, gdy w obwodzie istnieją oczka złożone wyłącznie z idealnych źródeł napięciowych i kondensatorów albo też, gdy w obwodzie istnieje przekrój zawierający wyłącznie indukcyjności i idealne źródła prądowe.

W pierwszym przypadku, do wyznaczenia napięć na kondensatorach w czasie t_0+ stosujemy tzw. zasadę zachowania ładunku w węzle, w drugim natomiast, do wyznaczenia prądów płynących przez indukcyjności w t_0+ , tzw. zasadę zachowania strumienia w oczku.

Dla badanego układu (rys.9) warunki początkowe otrzymuje się na podstawie wartości $u_c(t_0+)$ oraz $i(t_0+)$, które określone są wg praw komutacji, na podstawie wartości $u_c(t_0-)$ i $i(t_0-)$.

W szczególności, gdy $t_0 = 0$

$$\begin{cases} i(0+) = i(0-) \\ \frac{di}{dt}(0+) = \frac{1}{L} [E - Ri(0+) - u_c(0+)] = \frac{1}{L} [E - Ri(0-) - u_c(0-)] \end{cases} \quad (29)$$

Wielomian charakterystyczny równania (25) jest następujący

$$\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0 \quad (30)$$

Pierwiastki charakterystyczne wynoszą:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L} \mp \frac{1}{2}\sqrt{\Delta} = -\frac{R}{2L} \mp \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = \frac{R}{2L} \left[-1 \mp \sqrt{1 - \left(\frac{2}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\right)^2} \right] \quad (31)$$

Wprowadzamy oznaczenia

$$\alpha = -\frac{R}{2L}, \omega_r^2 = \frac{1}{LC} \beta = \frac{1}{2}\sqrt{\Delta} = \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = \sqrt{\alpha^2 - \omega_r^2} \quad (32)$$

stąd

$$\lambda_1 = \alpha - \beta, \quad \lambda_2 = \alpha + \beta \quad (33)$$

Równanie (25) jest równaniem jednorodnym co oznacza, że jego rozwiązanie jest kombinacją liniową liniowo niezależnych rozwiązań, odpowiadających poszczególnym pierwiastkom charakterystycznym

$$i(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} = e^{\alpha t} \left(A_1 e^{-\beta t} + A_2 e^{\beta t} \right) \quad (34)$$

gdzie: stałe A_1 i A_2 wyznaczone są na podstawie warunków początkowych dla $t = 0+$

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = i(0+) \\ \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 = \frac{di}{dt}(0+) \end{cases} \quad (35)$$

Uwzględniając (29) otrzymujemy

$$A_1 = \frac{\frac{di}{dt}(0+) - \lambda_2 i(0+)}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{1}{2} i(0+) - \frac{1}{2} \cdot \frac{E - u_c(0+) - \frac{1}{2} Ri(0+)}{\beta L} \quad (36)$$

$$A_2 = \frac{\frac{di}{dt}(0+) - \lambda_1 i(0+)}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{1}{2} i(0+) + \frac{1}{2} \cdot \frac{E - u_c(0+) - \frac{1}{2} Ri(0+)}{\beta L} \quad (37)$$

Wykorzystując obliczone współczynniki, przebieg prądu można przedstawić następująco

$$i(t) = \frac{1}{2} \left[i(0-) - \frac{E - u_c(0-) - \frac{1}{2} Ri(0-)}{\beta L} \right] e^{(\alpha - \beta)t} + \frac{1}{2} \left[i(0-) + \frac{E - u_c(0-) - \frac{1}{2} Ri(0-)}{\beta L} \right] e^{(\alpha + \beta)t} \quad (38)$$

Na podstawie (38) możliwe jest wyznaczenie przebiegu dowolnej wielkości w obwodzie. Na przykład napięcia na elementach L , C wynoszą¹⁾

$$u_L(t) = \frac{1}{2} \left\{ \left[E - u_c(0-) - Ri(0-) \right] + \left[\frac{R}{2\beta L} (E - u_c(0-) - Ri(0-)) + \frac{i(0-)}{\beta C} \right] \right\} e^{(\alpha-\beta)t} + \frac{1}{2} \left\{ \left[E - u_c(0-) - Ri(0-) \right] - \left[\frac{R}{2\beta L} (E - u_c(0-) - Ri(0-)) + \frac{i(0-)}{\beta C} \right] \right\} e^{(\alpha+\beta)t} \quad (39)$$

$$u_c(t) = E - \frac{1}{2} \left\{ \left[E - u_c(0-) \right] - \left[\frac{R}{2\beta L} (E - u_c(0-)) - \frac{i(0-)}{\beta C} \right] \right\} e^{(\alpha-\beta)t} + \frac{1}{2} \left\{ \left[E - u_c(0-) \right] + \left[\frac{R}{2\beta L} (E - u_c(0-)) - \frac{i(0-)}{\beta C} \right] \right\} e^{(\alpha+\beta)t} \quad (40)$$

Zależności (38) – (40) można zapisać także w innej postaci,

$$i(t) = e^{-\frac{R}{2L}t} \left\{ \frac{E - u_c(0-) - \frac{1}{2} Ri(0-)}{\beta L} \operatorname{sh}(\beta t) + i(0-) \cdot \operatorname{ch}(\beta t) \right\} \quad (41)$$

$$u_L(t) = \left\{ - \left[\frac{R}{2\beta L} (E - u_c(0-) - Ri(0-)) - \frac{i(0-)}{\beta C} \right] \cdot \operatorname{sh}(\beta t) + \left[E - u_c(0-) - Ri(0-) \right] \cdot \operatorname{ch}(\beta t) \right\} \cdot e^{-\frac{R}{2L}t} \quad (42)$$

$$u_c(t) = E - \left\{ \left[\frac{R}{2\beta L} (E - u_c(0-)) - \frac{i(0-)}{\beta C} \right] \cdot \operatorname{sh}(\beta t) + \left[E - u_c(0-) \right] \cdot \operatorname{ch}(\beta t) \right\} \cdot e^{-\frac{R}{2L}t} \quad (43)$$

¹⁾ Zależności te stanowią także rozwiązania następujących równań.

$$\frac{d^2 u_c(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_c(t)}{dt} + \frac{1}{LC} u_c(t) = \frac{1}{LC} E; \quad \text{war. pocz.:} \quad \begin{cases} u_c(0+) = u_c(0-) \\ \frac{du_c}{dt}(0+) = \frac{1}{C} i(0-) \end{cases}$$

$$\frac{d^2 u_L(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_L(t)}{dt} + \frac{1}{LC} u_L(t) = 0; \quad \text{war. pocz.:} \quad \begin{cases} u_L(0+) = E - u_c(0-) - Ri(0-) \\ \frac{du_L}{dt}(0+) = -\frac{R}{L} [E - u_c(0-) - Ri(0-)] - \frac{1}{C} i(0-) \end{cases}$$

W zależności od wartości parametrów układu, przebiegi prądu i napięć mogą posiadać szczególne własności. Rozważymy trzy przypadki, odpowiadające różnym wartościom wyróżnika wielomianu charakterystycznego (30)

1^o $\Delta > 0, R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ - pierwiastki charakterystyczne równania (25) są liczbami rzeczywistymi.

Przy zerowych warunkach początkowych przebiegi prądu oraz napięć na elementach L , C wynoszą

$$i(t) = \frac{E}{2\beta L} \left[e^{(\alpha+\beta)t} - e^{(\alpha-\beta)t} \right] = \frac{E}{\beta L} e^{-\frac{R}{2L}t} \operatorname{sh}(\beta t) \quad (44)$$

$$\begin{aligned} u_L(t) &= \frac{1}{2} E \cdot \left[\left(1 + \frac{R}{2\beta L} \right) e^{(\alpha-\beta)t} + \left(1 - \frac{R}{2\beta L} \right) e^{(\alpha+\beta)t} \right] = \\ &= E \cdot \left[-\frac{R}{2\beta L} \operatorname{sh}(\beta t) + \operatorname{ch}(\beta t) \right] \cdot e^{-\frac{R}{2L}t} \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} u_C(t) &= E - \frac{1}{2} E \cdot \left[\left(1 - \frac{R}{2\beta L} \right) e^{(\alpha-\beta)t} + \left(1 + \frac{R}{2\beta L} \right) e^{(\alpha+\beta)t} \right] = \\ &= E - E \cdot \left[\frac{R}{2\beta L} \operatorname{sh}(\beta t) + \operatorname{ch}(\beta t) \right] \cdot e^{-\frac{R}{2L}t} \end{aligned} \quad (46)$$

Przykład 1 - przebiegi aperiodyczne

Dane:

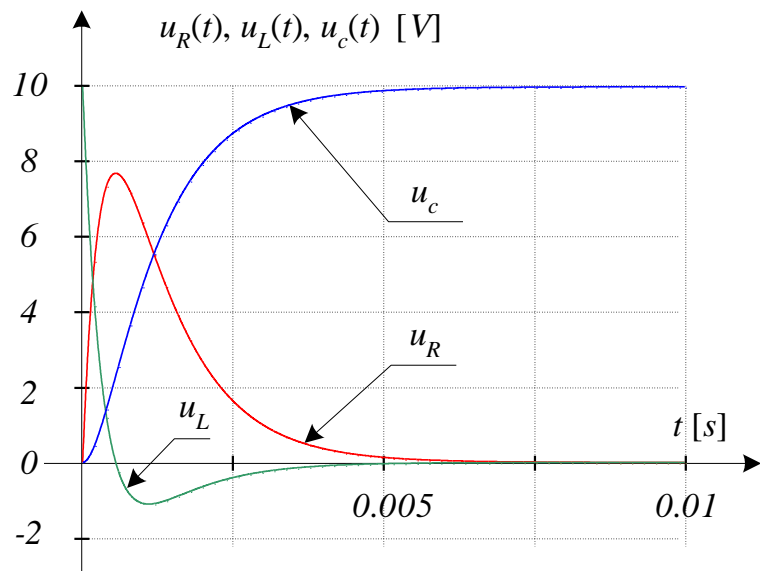
$$E = 10 \text{ V}, R = 2 \text{ k}\Omega, L = 0.5 \text{ H},$$

$$C = 2 \text{ }\mu\text{F}, u_C(0^-) = 0, i(0^-) = 0$$

$$R > 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 1000 \Omega$$

$$\alpha = -2000 \text{ s}^{-1}, \beta = 1000 \text{ s}^{-1}$$

$$\lambda_1 = -3000 \text{ s}^{-1}, \lambda_2 = -1000 \text{ s}^{-1}$$



rys.10

$$u_R(t) = 20e^{-10^3 t} - 20e^{-3 \cdot 10^3 t} \text{ V},$$

$$u_L(t) = 15e^{-3 \cdot 10^3 t} - 5e^{-10^3 t} \text{ V}$$

$$u_C(t) = 10 + 5e^{-3 \cdot 10^3 t} - 15e^{-10^3 t} \text{ V}$$

$2^0 \Delta = 0, R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ - równanie posiada jeden pierwiastek charakterystyczny - dwukrotny

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \alpha = -\frac{R}{2L} \quad (47)$$

Przebiegi dla danego przypadku nazywane są przebiegami aperiodycznymi-granicznymi. Uwzględniając w (44) – (46) przejście graniczne

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{\text{sh}(\beta t)}{\beta} = t \quad (48)$$

otrzymujemy, dla zerowych wartości początkowych, zależności

$$i(t) = \frac{E}{L} \cdot t \cdot e^{-\frac{R}{2L}t} \quad (49)$$

$$u_L(t) = E \left(1 - \frac{R}{2L}t \right) \cdot e^{-\frac{R}{2L}t} \quad (50)$$

$$u_C(t) = E - E \left(1 + \frac{R}{2L}t \right) \cdot e^{-\frac{R}{2L}t} \quad (51)$$

Przykład 2 - przebiegi aperiodyczne - graniczne

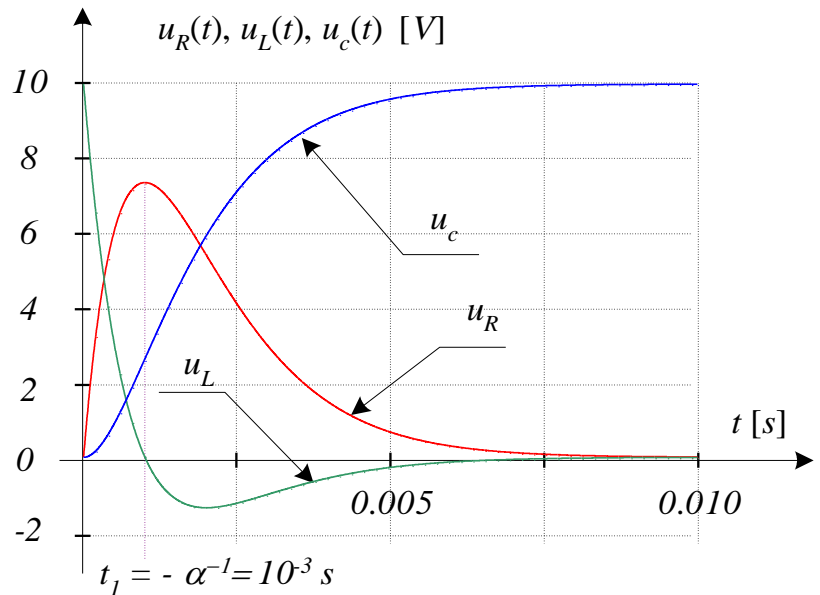
Dane:

$E = 10 \text{ V}, R = 1 \text{ k}\Omega, L = 0.5 \text{ H},$
 $C = 2 \text{ }\mu\text{F}, u_C(0^-) = 0, i(0^-) = 0$

$$R = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 1000 \Omega,$$

$$\alpha = -1000 \text{ s}^{-1}, \beta = 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1000 \text{ s}^{-1}$$



rys.11

$$u_R(t) = 2 \cdot 10^4 t \cdot e^{-10^3 t} \text{ V}, \quad u_L(t) = 10 \cdot \left[1 - 10^3 t \right] e^{-10^3 t} \text{ V}$$

$$u_C(t) = 10 - 10 \cdot \left[1 + 10^3 t \right] e^{-10^3 t} \text{ V}$$

$3^0 \Delta < 0, R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ - równanie posiada dwa pierwiastki charakterystyczne - zespolone

$$\lambda_{1,2} = \alpha \mp \frac{1}{2}\sqrt{\Delta} = \alpha \mp j\frac{1}{2}\sqrt{-\Delta} = \alpha \mp j\omega_0 \quad (52)$$

gdzie:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = \sqrt{\omega_r^2 - \alpha^2} \quad (53)$$

Uwzględniając związki

$$\mathbf{sh}(j\omega_0 t) = j\mathbf{sin}(\omega_0 t), \quad \mathbf{ch}(j\omega_0 t) = \mathbf{cos}(\omega_0 t) \quad (54)$$

otrzymujemy przebiegi, które dla zerowego stanu początkowego przyjmują postać

$$i(t) = \frac{E}{\omega_0 L} e^{-\frac{R}{2L}t} \mathbf{sin}(\omega_0 t) \quad (55)$$

$$u_L(t) = E \cdot \left[-\frac{R}{2\omega_0 L} \mathbf{sin}(\omega_0 t) + \mathbf{cos}(\omega_0 t) \right] \cdot e^{-\frac{R}{2L}t} \quad (56)$$

$$u_C(t) = E - E \cdot \left[\frac{R}{2\omega_0 L} \mathbf{sin}(\omega_0 t) + \mathbf{cos}(\omega_0 t) \right] \cdot e^{-\frac{R}{2L}t} \quad (57)$$

Przykład 3 – przebiegi oscylacyjne

Dane:

$$E = 10 \text{ V}, R = 100 \ \Omega,$$

$$L = 0.5 \text{ H}, C = 2 \ \mu\text{F}$$

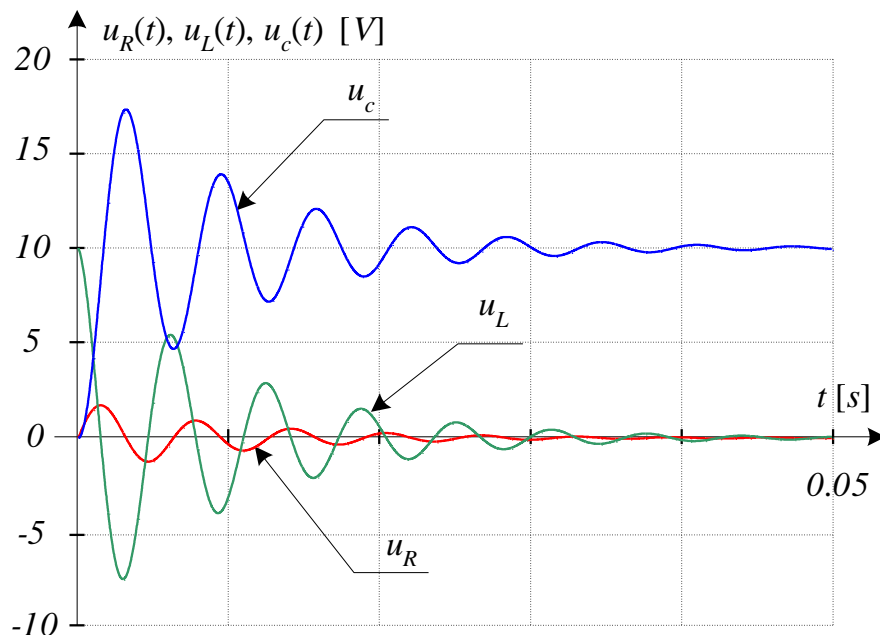
$$u_C(0^-) = 0, i(0^-) = 0$$

$$R < 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 1000 \ \Omega$$

$$\alpha = -100 \text{ s}^{-1}$$

$$\omega_0 \approx 995 \text{ s}^{-1}$$

$$\Rightarrow f_0 \approx 158 \text{ Hz}$$



rys.12

$$u_R(t) = 2 \cdot e^{-100t} \mathbf{sin}(995t) \text{ V}, \quad u_L(t) = 10 \cdot \left[-\frac{100}{995} \mathbf{sin}(995t) + \mathbf{cos}(995t) \right] \cdot e^{-100t} \text{ V}$$

$$u_C(t) = 10 - 10 \cdot \left[\frac{100}{995} \mathbf{sin}(995t) + \mathbf{cos}(995t) \right] \cdot e^{-100t} \text{ V}$$

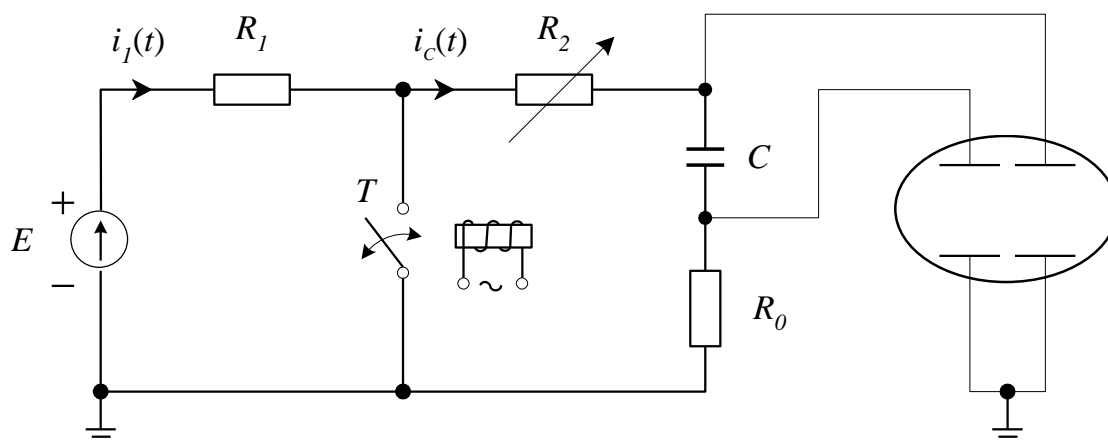
3. Program ćwiczenia.

Realizacja niniejszego ćwiczenia polega na:

- obserwacji na oscyloskopie wybranych przebiegów, w przedstawionych niżej układach;
- wyznaczeniu parametrów charakteryzujących dany przebieg (stała czasowa, współczynnik tłumienia, częstotliwość oscylacji);
- ocenie zgodności pomiarów za pomocą oscyloskopu z wynikami obliczonymi wg zależności teoretycznych;

3.1. Układy I - rzędu.

3.1.1. Badanie układu RC.



rys.13 Schemat układu do badania stanu przejściowego w gałęzi RC

W układzie przedstawionym na rys.13 można wyróżnić dwa stany pracy, określone przez położenie styków przełącznika.

1^o Styki przełącznika otwarte – następuje ładowanie kondensatora ze źródła E przez rezystory R_0 , R_1 i R_2 ;

2^o Styki przełącznika zamknięte – kondensator rozładowuje się przez rezystory R_0 i R_2 ;

Zakładając, że przedziały czasu odpowiadające obu stanom pracy przełącznika są jednakowe ($T = 0.01s$), przebieg napięcia na kondensatorze, w stanie ustalonym, można w jednym cyklu opisać następującymi zależnościami (por. zal. (4) i (9))

$$u_c(t) = E - (E - u_{c_{min}}) \cdot e^{-\frac{t}{\tau_1}} \quad (\text{ładowanie}) \quad (58)$$

$$u_c(t) = u_{c_{max}} \cdot e^{-\frac{t-T}{\tau_2}} \quad (\text{rozładowanie}) \quad (59)$$

gdzie: $\tau_1 = (R_0 + R_1 + R_2)C$, $\tau_2 = (R_0 + R_2)C$ – stałe czasowe obwodu;

$u_{c_{min}}$, $u_{c_{max}}$ – graniczne wartości napięcia ładowania i rozładowania kondensatora w stanie ustalonym.

$$u_{c_{max}} = E - (E - u_{c_{min}}) \cdot e^{-\frac{T}{\tau_1}}, \quad u_{c_{min}} = u_{c_{max}} \cdot e^{-\frac{T}{\tau_2}} \quad (60)$$

Stąd otrzymujemy

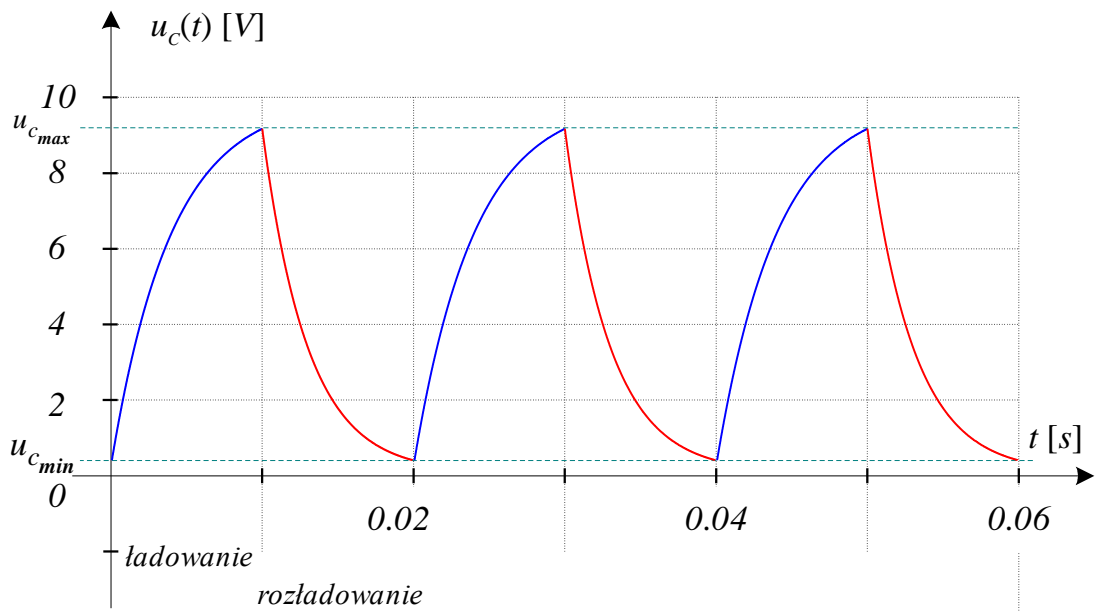
$$u_{c_{max}} = E \frac{1 - e^{-\frac{T}{\tau_1}}}{1 - e^{-T\left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}\right)}}, \quad u_{c_{min}} = E \frac{1 - e^{-\frac{T}{\tau_1}}}{1 - e^{-T\left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}\right)}} e^{-\frac{T}{\tau_2}} \quad (61)$$

Jeżeli $\tau_1 \ll T$ i $\tau_2 \ll T$ to $u_{c_{max}} \approx E$ oraz $u_{c_{min}} \approx 0$

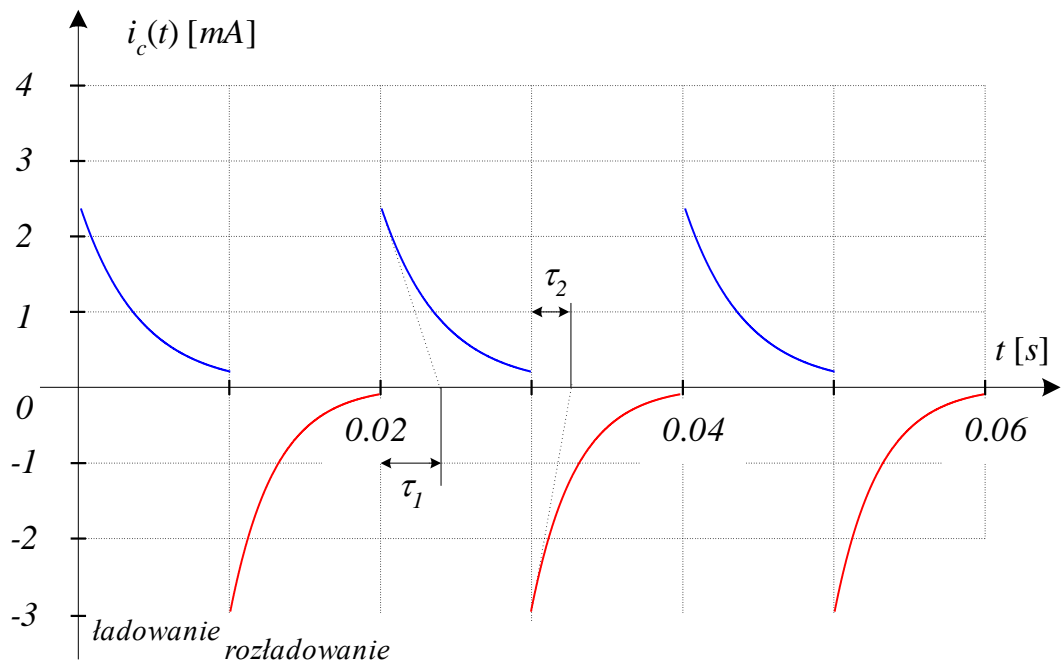
Na rys. 14a i 14b przedstawiono przykładowe przebiegi napięcia na kondensatorze oraz prądu, dla następujących danych:

$$E = 10 \text{ V}, R_1 = 1 \text{ k}\Omega, R_0 + R_2 = 3 \text{ k}\Omega, C = 1 \mu\text{F}, \tau_1 = 4 \cdot 10^{-3} \text{ s}, \tau_2 = 3 \cdot 10^{-3} \text{ s}, T = 0.01 \text{ s}$$

a)

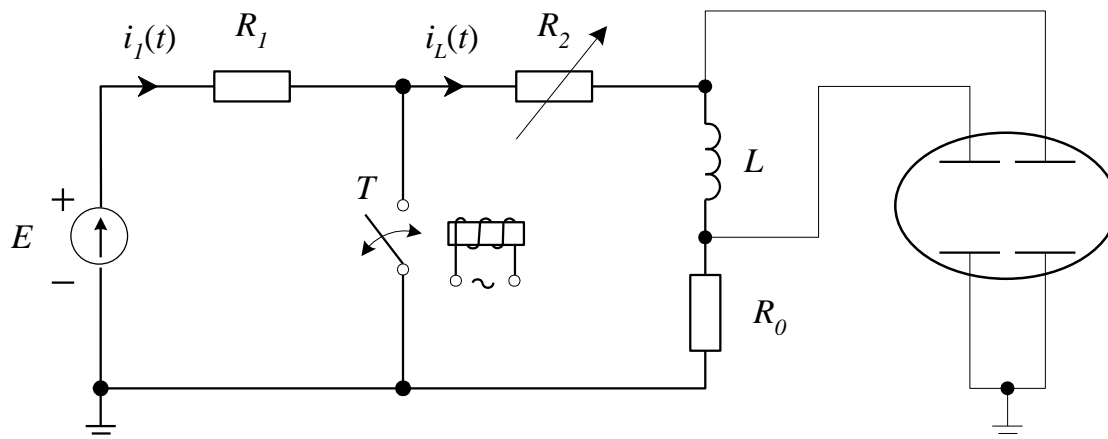


b)



rys.14

3.1.2. Badanie układu RL



rys.15 Schemat układu do badania stanu przejściowego w gałęzi RL

W układzie przedstawionym na rys.15 można wyróżnić dwa stany pracy, określone przez położenie styków przełącznika.

1⁰ Styki przełącznika otwarte - załączanie gałęzi $(R_0 + R_1 + R_2)$ i L na napięcie stałe;

2⁰ Styki przełącznika zamknięte - zwarcie gałęzi $(R_0 + R_2)$ i L ;

Zakładając, że przedziały czasu odpowiadające obu stanom pracy przełącznika są jednakowe (T), przebieg prądu płynącego przez indukcyjność, w stanie ustalonym, można w jednym cyklu opisać zależnościami wykorzystując m.in. (14) i (19)

$$i_L(t) = \frac{E}{R_0 + R_1 + R_2} - \left(\frac{E}{R_0 + R_1 + R_2} - i_{L_{min}} \right) \cdot e^{-\frac{t}{\tau_1}} \quad (\text{ładowanie}) \quad (62)$$

$$i_L(t) = i_{L_{max}} \cdot e^{-\frac{t-T}{\tau_2}} \quad (\text{rozładowanie}) \quad (63)$$

gdzie: $\tau_1 = \frac{L}{R_0 + R_1 + R_2}$, $\tau_2 = \frac{L}{R_0 + R_2}$ - stałe czasowe obwodu;

$i_{L_{min}}$, $i_{L_{max}}$ - graniczne wartości prądu płynącego przez cewkę w stanie ustalonym;

Zależności określające graniczne wartości prądu płynącego przez indukcyjność otrzymuje się podobnie, jak w przypadku napięcia na kondensatorze (zal. (60) i (61)).

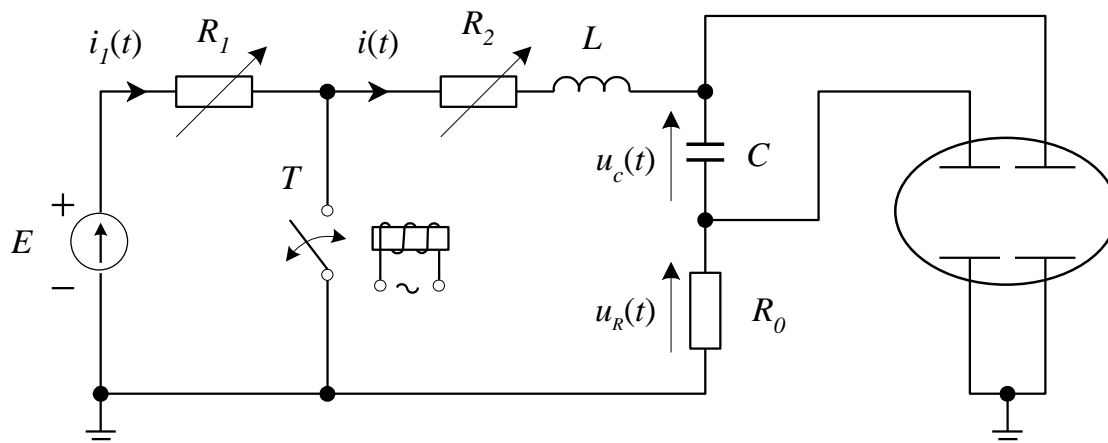
$$i_{L_{max}} = \frac{E}{R_1 + R_2 + R_0} \frac{1 - e^{-\frac{T}{\tau_1}}}{1 - e^{-T\left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}\right)}}, \quad i_{L_{min}} = i_{L_{max}} \cdot e^{-\frac{T}{\tau_2}} \quad (64)$$

Podobnie jak poprzednio, jeżeli $\tau_1 \ll T$ oraz $\tau_2 \ll T$ to

$$i_{L_{min}} \approx 0, \quad i_{L_{max}} \approx \frac{E}{R_0 + R_1 + R_2} \quad (65)$$

3.2. Układ II - rzędu.

3.2.1. Badanie układu RLC.



rys.16 Schemat układu do badania stanu przejściowego w gałęzi RLC

W układzie przedstawionym na rys.16 badany jest stan przejściowy w gałęzi szeregowej RLC. Położenie styków przełącznika określa rodzaj pracy.

- 1⁰ Styki przełącznika otwarte – załączanie gałęzi $(R_0+R_1+R_2)$, L i C na napięcie stałe;
- 2⁰ Styki przełącznika zamknięte – zwarcie gałęzi (R_0+R_2) , L i C ;

W badanym obwodzie szczegółowy opis możliwych kombinacji przebiegów, w obu stanach pracy przełącznika, jest bardziej złożony aniżeli w przypadku obwodów I – rzędu.

W ramach ćwiczenia należy, dobierając odpowiednie wartości rezystancji R_1 i R_2 , uzyskać przebiegi o podanych w poniższej tabeli własnościach:

Charakter przebiegów, gdy styki przełącznika są otwarte	Charakter przebiegów, gdy styki przełącznika są zamknięte	Uwagi
<i>aperiodyczny</i>	<i>aperiodyczny</i>	$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0,$
<i>aperiodyczny</i>	<i>aperiodyczny-graniczny</i>	$\Delta_1 > 0, \Delta_2 = 0,$
<i>aperiodyczny</i>	<i>oscylacyjny</i>	$\Delta_1 > 0, \Delta_2 < 0,$
<i>aperiodyczny-graniczny</i>	<i>oscylacyjny</i>	$\Delta_1 = 0, \Delta_2 < 0,$
<i>oscylacyjny</i>	<i>oscylacyjny</i>	$\Delta_1 < 0, \Delta_2 < 0,$

gdzie: Δ_1 (Δ_2) - wyróżnik równania charakterystycznego dla obwodu przy otwartych (zamkniętych) stykach przełącznika.

Uwaga: Należy zwrócić uwagę, aby rezystancja R_1 nie była mniejsza niż 100Ω

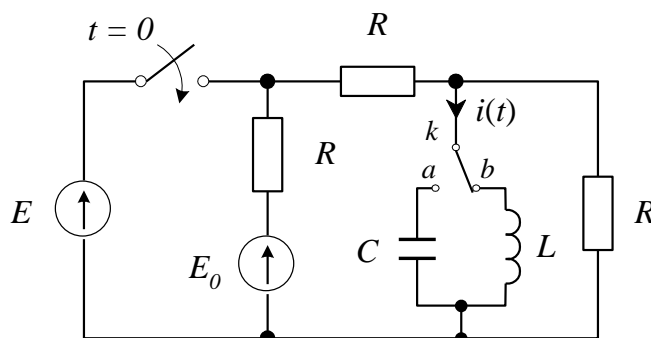
4. Pytania kontrolne.

1. Wyznaczyć przebiegi prądu oraz napięć w gałęziach RL i RC przy zasilaniu gałęzi napięciem stałym oraz dla stanu zwarcia gałęzi, przy niezerowych warunkach początkowych.

2. Wyznaczyć przebieg prądu $i(t)$ zakładając, że dla $t < 0$, w układzie panował stan ustalony.

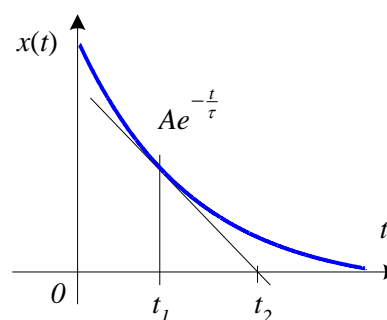
Dane: E_0 , E , R , L , C ;

Uwzględnić dwa przypadki położenia klucza k – poz. "a" lub "b".



3. Wykazać, że jeżeli przebieg $x(t)$ (przedstawiony obok) stanowi odpowiedź układu pierwszego rzędu na pobudzenie stałe, to stałą czasową tego układu można wyznaczyć ze wzoru:

$$\tau = t_2 - t_1$$



4. Co to są prawa komutacji, z czego wynikają i do czego są wykorzystywane ?

5. Podać przykład obwodu (teoretycznego), w którym nie jest spełnione prądowe (napięciowe) prawo komutacji.

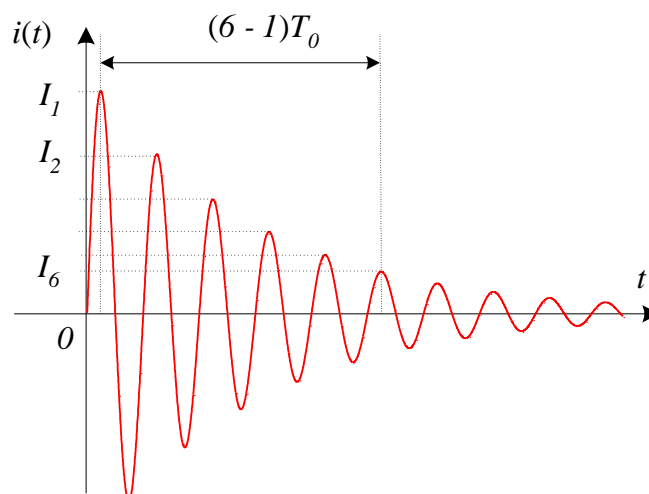
6. Omówić metodę wyznaczania stanu przejściowego w układzie II – rzędu, na przykładzie szeregowego obwodu RLC , zasilanego ze źródła napięcia stałego. Jaki jest wpływ wartości parametrów obwodu na charakter rozwiązania ?

7. Na podstawie przebiegu prądu o charakterze oscylacyjnym (55), w szeregowym obwodzie RLC , przy zerowych warunkach początkowych, można wyznaczyć współczynnik tłumienia α na podstawie wzoru:

$$\alpha = -\frac{1}{(n-k)T_0} \ln \frac{I_k}{I_n}$$

gdzie: $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

Wyprowadzić powyższą zależność.
(w przykładzie obok: $k = 1$, $n = 6$)



Uwagi dotyczące ćwiczenia:

Laboratorium Elektrotechniki Teoretycznej
Teoria Obwodów 2
ELR021303L

Temat ćwiczenia:

**Badanie przebiegów
okresowych**

Instytut Podstaw Elektrotechniki i Elektrotechnologii -



Zakład Elektrotechniki Teoretycznej



1. Cel ćwiczenia.

Celem ćwiczenia jest pomiar podstawowych parametrów charakteryzujących sygnały okresowe, występujące w obwodach elektrycznych, zawierających diody prostownicze oraz badanie i określenie wpływu parametrów obwodów na obserwowane przebiegi okresowe.

2. Zakres ćwiczenia.

Ćwiczenie obejmuje badanie stanu ustalonego - okresowego napięć i prądów w układach prostowniczych wielofazowych z obciążeniem rezystancyjnym oraz w układach zawierających elementy bierne (L , C).

Badanie polegać będzie na :

- obserwacji na oscyloskopie przebiegów napięcia (napięć) na odbiorniku ;
- pomiarze wartości skutecznej i średniej napięcia odbiornika dla różnych parametrów obwodu i zasilania ;
- porównanie wyznaczonych pomiarowo parametrów oraz przebiegów z określonymi teoretycznie;

3. Wstęp teoretyczny.**3.1. Parametry sygnału okresowego.**

Sygnał $x(t)$ nazywamy okresowym jeżeli istnieje liczba T , dla której dla dowolnego t

$$x(t) = x(t + kT) \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1)$$

Okresem sygnału nazywamy najmniejszą wartość T spełniającą równanie (1).

Podstawową metodą analizy sygnałów okresowych jest tzw. analiza fourierowska polegająca na przedstawieniu sygnału za pomocą tzw. szeregu Fouriera, którego postać wykładnicza jest następująca

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{c}_k e^{jk\omega_0 t} \quad (2)$$

gdzie : \underline{c}_k - współczynniki wykładniczego szeregu Fouriera

$$\underline{c}_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad \text{gdzie : } \omega_0 = \frac{2\pi}{T} ; T - \text{okres sygnału} \quad (3)$$

Jeżeli $x(t)$ jest sygnałem rzeczywistym to

$$\underline{c}_{-k} = \underline{c}_k^* \quad (4)$$

Zapisując współczynniki \underline{c}_k w postaci

$$\underline{c}_k = \frac{1}{2} [a_k - jb_k] \quad (5)$$

można sygnał $x(t)$ przedstawić za pomocą szeregu trygonometrycznego,

$$x(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t\} \quad (6)$$

którego współczynniki określone są następującymi zależnościami

$$a_k = 2 \operatorname{Re} \underline{c}_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos k\omega_0 t dt, \quad b_k = -2 \operatorname{Im} \underline{c}_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin k\omega_0 t dt \quad (7)$$

Szereg trygonometryczny można zapisać także w innej - równoważnej postaci

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} X_{k_{sk}} \sin(k\omega_0 t + \psi_k) \quad (8)$$

gdzie : $X_{k_{sk}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = \sqrt{2} |c_k|$ - wartość skuteczna k -tej harmonicznej ; $\tan \psi_k = \frac{a_k}{b_k}$; (8a)

Podstawowymi wartościami, określanymi dla rzeczywistego sygnału okresowego są:

- wartość średnia sygnału "wyprostowanego": $X_{sr} = \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)| dt$ (9)

- wartość skuteczna : $X_{sk} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt}$ (10)

Wykorzystując powyższe wartości określa się współczynniki charakteryzujące przebiegi okresowe:

- współczynnik szczytu : $k_s = \frac{X_m}{X_{sk}}$ (X_m - wartość maksymalna) (11)

- współczynnik kształtu : $k_k = \frac{X_{sk}}{X_{sr}}$ (12)

- współczynnik zawartości k -tej harmonicznej : $h_k = \frac{X_{k_{sk}}}{X_{I_{sk}}}$ (13)

- współczynnik zawartości harmonicznym : $h = \sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} h_k^2} = \frac{\sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} X_{k_{sk}}^2}}{X_{I_{sk}}}$ (14)

Współczynnik zawartości harmonicznym można obliczać posługując się prostszą zależnością, wynikającą z tzw. twierdzenia Parsewala, który dla rzeczywistego przebiegu $x(t)$ można przedstawić następująco

$$\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k c_k^* = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \quad (15)$$

Przechodząc na szereg rzeczywisty (8) oraz uwzględniając (8a) (10) i (15) otrzymujemy

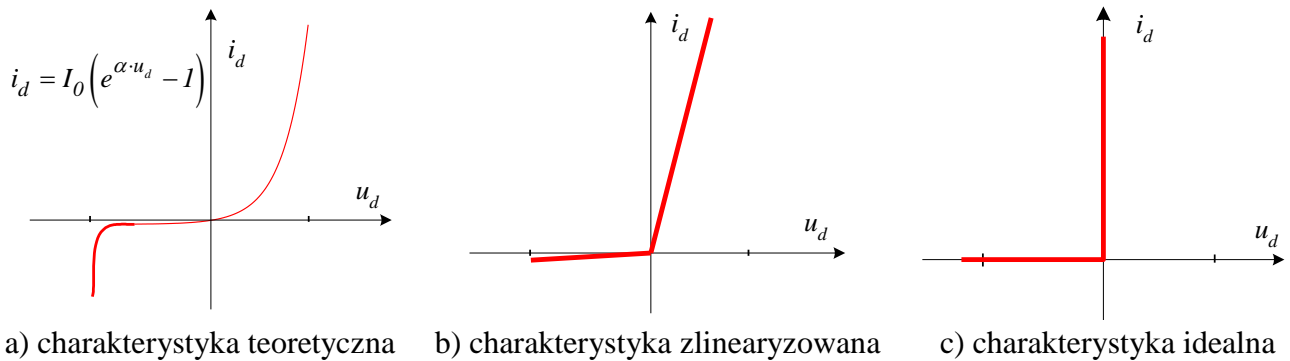
$$X_{sk}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} X_{k_{sk}}^2 \quad (16)$$

Współczynnik zawartości harmonicznym możemy wyznaczyć teraz posługując się wyrażeniem

$$h = \frac{\sqrt{X_{sk}^2 - X_0^2 - X_{I_{sk}}^2}}{X_{I_{sk}}} = \sqrt{\frac{X_{sk}^2 - X_0^2}{X_{I_{sk}}^2} - 1} \quad (17)$$

3.2. Ogólna charakterystyka układów zawierających diody prostownicze

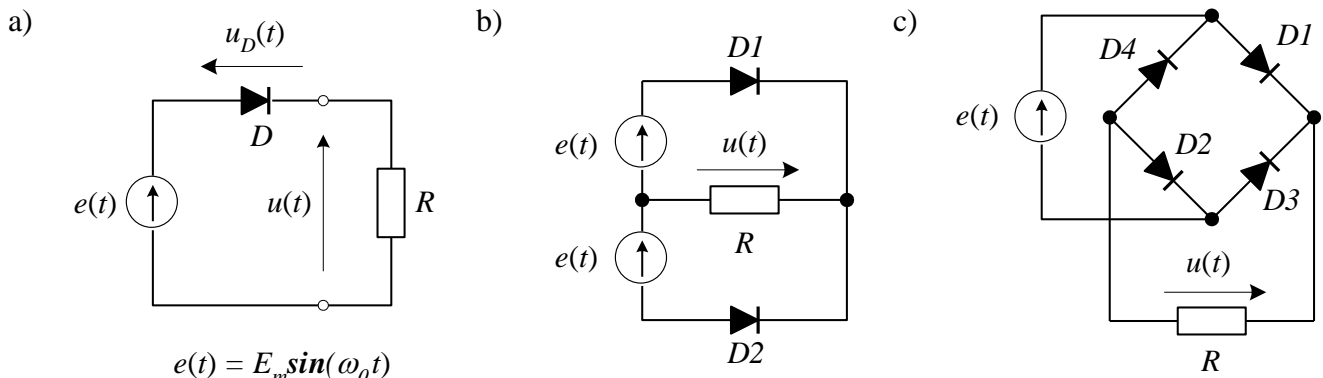
Diody prostownicze należą do najczęściej stosowanych w obwodach elektrycznych, elementów nieliniowych - bezinercyjnych. Jej teoretyczną charakterystykę prądowo-napięciową przedstawiono na Rys.1a.



Rys.1

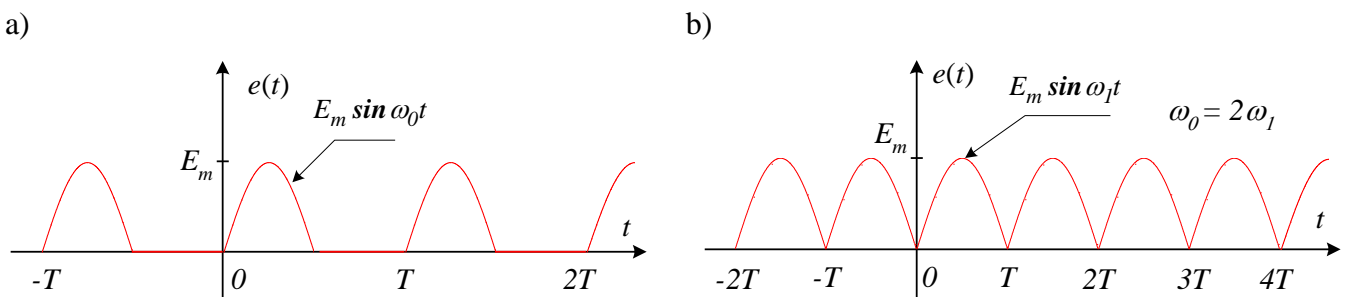
Do analizy obwodów zawierających diody prostownicze wykorzystuje się najczęściej charakterystykę idealną (Rys.1c), która przedstawia diodę jako idealny klucz zwierny lub rozcinający gałąź w miejscu jej włączenia. Stan pracy diody określony jest kierunkiem przepływającego przez nią prądu lub kierunkiem napięcia.

Do najprostszych obwodów zawierających diody należą układy prostownicze jednofazowe jedno- lub dwufalowe obciążone odbiornikiem rezystancyjnym. Przykłady tych obwodów przedstawiono na Rys.2.



Rys.2

Przebieg napięcia w układzie 'a' jest sinusoidą wyprostowaną jednofalowo, a w układach "b", "c" sinusoidą wyprostowaną dwufalowo. Wykresy tych przebiegów przedstawiono na Rys.3



Rys.3

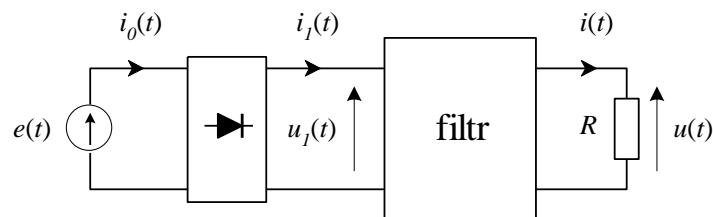
W poniższej tabeli zamieszczono podstawowe parametry przebiegów z Rys.3, oraz ich zapis w postaci trygonometrycznego szeregu Fouriera.

Sinusoida wyprostowana jednofalowo (Rys. 3a)	
$e(t) = \frac{E_m}{2} \left[\sin \omega t + \sin \omega t \right] = E_m \left[\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin \omega_0 t - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} \cos 2k\omega_0 t \right] \quad (\omega_0 = \omega)$	
$a_0 = \frac{2E_m}{\pi}; \quad a_{2k} = \frac{2}{\pi} \frac{E_m}{4k^2 - 1}; \quad a_{2k+1} = 0; \quad b_1 = \frac{E_m}{2}; \quad b_k = 0 \quad \text{dla } k > 1;$	
$E_{sk} = \frac{E_m}{2}; \quad E_{sr} = \frac{E_m}{\pi}; \quad k_s = 2; \quad k_k = \frac{\pi}{2} \approx 1.57; \quad h_{2k} = \frac{4}{\pi} \frac{1}{4k^2 - 1}; \quad h = \sqrt{1 - \frac{8}{\pi^2}} \approx 0.43$	

Sinusoida wyprostowana dwufalowo (Rys.3b)	
$e(t) = E_m \sin \omega_1 t = E_m \left[\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} \cos k\omega_0 t \right] \quad (\omega_0 = 2\omega_1)$	
$a_0 = \frac{4E_m}{\pi}; \quad a_k = \frac{4}{\pi} \frac{E_m}{4k^2 - 1}; \quad b_k = 0 \quad \text{dla } k > 0;$	
$E_{sk} = \frac{E_m}{\sqrt{2}}; \quad E_{sr} = \frac{2E_m}{\pi}; \quad k_s = \sqrt{2}; \quad k_k = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1.11; \quad h_k = \frac{3}{4k^2 - 1}; \quad h = \frac{\sqrt{9\pi^2 - 88}}{4} \approx 0.227$	

W celu zmniejszenia tętnień "wyprostowanego" napięcia, stosuje się układy filtrujące, złożone m.in. z elementów biernych. Obecność indukcyjności lub pojemności zmienia własności energetyczne obwodu, czego efektem jest przepływ przez odbiornik jednokierunkowego prądu w wydłużonych, względem układu bez filtra, przedziałach czasowych. Zmianie ulegają również położenia przedziałów przewodzenia diody, względem przebiegu napięcia zasilającego. W niektórych układach przedziały te ulegają wydłużeniu, w innych zostają skrócone.

Ogólny schemat układu prostowniczego z filtrem wygładzającym przedstawiony jest na Rys.4

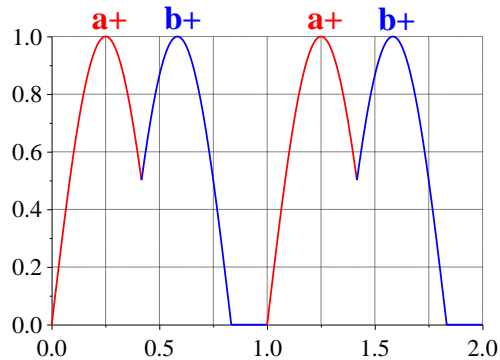


Rys.4

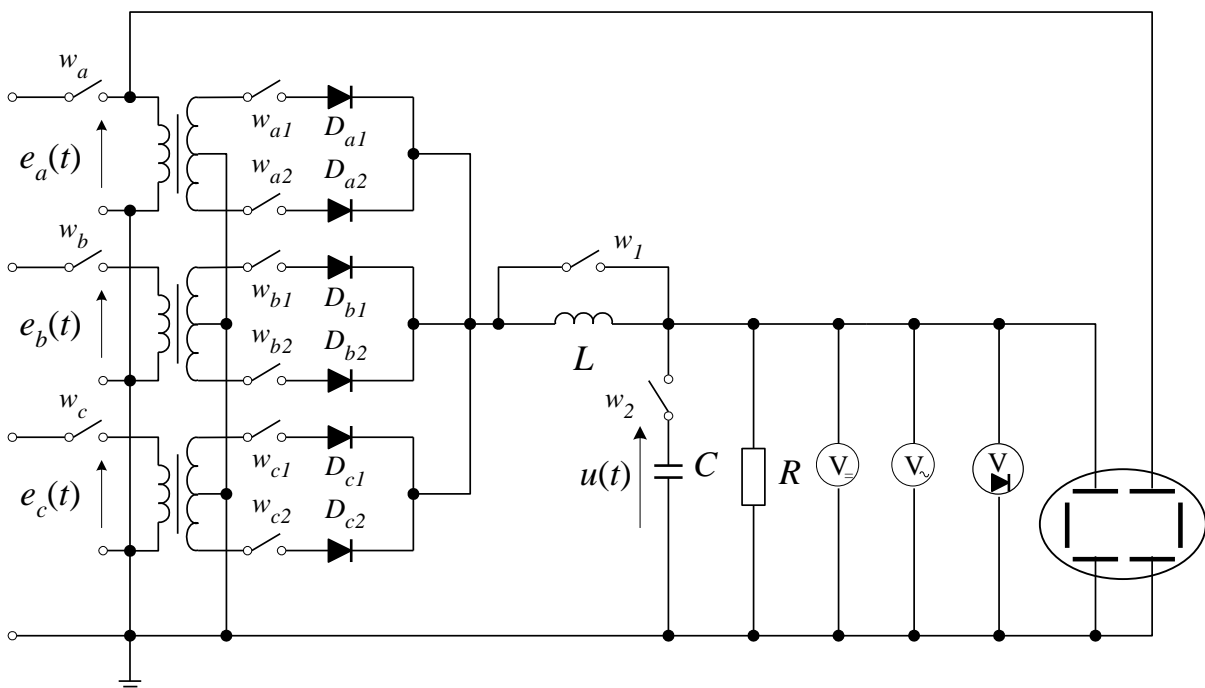
Teoretyczne wyznaczenie przebiegów prądów i napięć w układach prostowniczych zawierających elementy bierne jest zadaniem złożonym. Jeżeli rozpatrywany jest najprostszy model diody (Rys.1c) to do analizy obwodu stosuje się metody wykorzystywane dla obwodów liniowych. Diodę można w tym przypadku zastąpić kluczem - zamykanym lub otwierany w zależności od stanu pracy (przewodzenie lub zablokowanie). Podstawowym problemem jest zatem określenie położenia przedziałów czasowych odpowiadających tym stanom. Należy jednak stwierdzić, że jedynie w niektórych, prostych obwodach możliwe jest ich dokładne wyznaczenie. W większości przypadków otrzymuje się równania, których rozwiązanie nie może być przedstawione w postaci analitycznej.

4. Program ćwiczenia

- a) Do trójfazowego panelu prostowniczego (Rys.5) podłączyć dwukanałowy oscyloskop oraz woltomierze – elektromagnetyczny, magnetoelektryczny oraz przyrząd uniwersalny UM-3.
- b) Na podstawie wskazówek prowadzącego ćwiczenie ustawić odpowiednią sekwencję kluczy w_{a1} , w_{a2} , w_{b1} , w_{b2} , w_{c1} , w_{c2} (np. 10–10–00 - oznacza załączenie kluczy w_{a1} i w_{b1} , przy pozostałych kluczach otwartych). Przebieg napięcia $u(t)$ w takim układzie ma następującą postać:



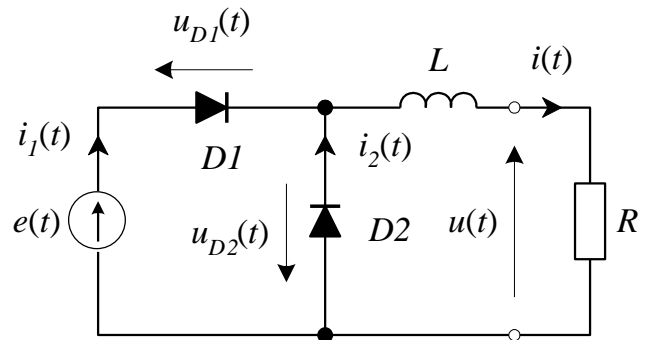
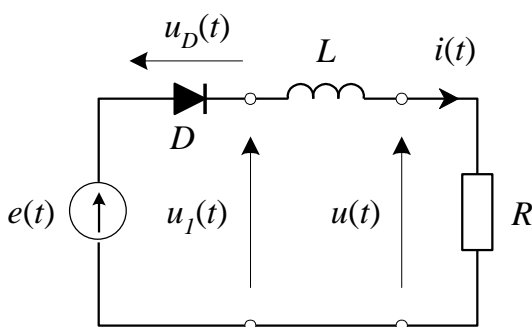
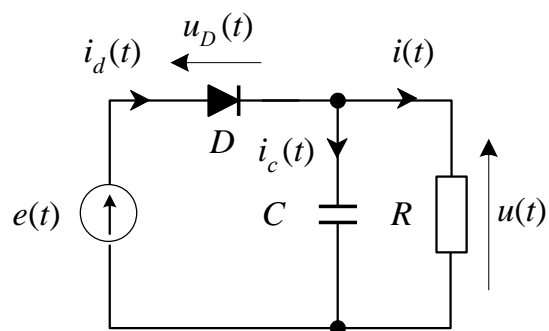
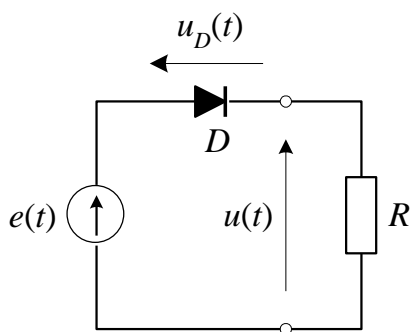
- c) Dokonać pomiaru napięć w układzie przy otwartych kluczach w_1 , w_2 .
- d) Przeprowadzić pomiary z p. c) przy załączonych kolejno kluczach: w_1 , w_2 oraz w_1 i w_2 .
- e) Przerysować obserwowane przebiegi z ekranu oscyloskopu wykorzystując na przykład kalkę techniczną.
- f) Na podstawie zmierzonych napięć oraz obserwacji obliczyć współczynniki kształtu, szczytu badanych przebiegów.
- g) Porównać otrzymane wyniki z teoretycznymi.



Rys.5

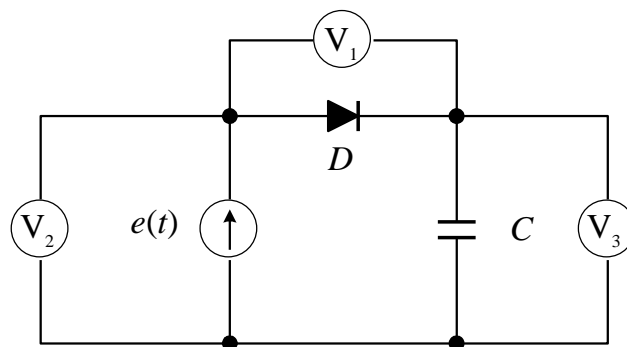
5. Pytania kontrolne.

- a) Podać zapis sygnału okresowego za pomocą szeregu Fouriera w postaci wykładniczej oraz trygonometrycznej. Podać związek między współczynnikami tych szeregów.
- b) Podać parametry charakteryzujące przebieg okresowy.
- c) Ile wynosi współczynnik kształtu sinusoidy "wyprostowanej" jedno- i dwufalowo ?
- c) Jak określa się wartość skuteczną przebiegu okresowego na podstawie wartości skutecznych jego harmonicznych.
- d) Naszkicować charakterystyki diody półprzewodnikowej (prostowniczej).
- e) Narysować schemat jednofazowego układu prostownika dwufalowego.
- f) Naszkicować przebiegi napięcia $u(t)$ na odbiorniku R w poniższych układach:



gdzie: $e(t) = E_m \sin(\omega_0 t)$

- g) Jaką rolę w układach prostowniczych spełniają elementy bierne ?
- h) Przyjmując w poniższym układzie $e(t) = E_m \sin(\omega_0 t)$ wyznaczyć wskazania woltomierzy.



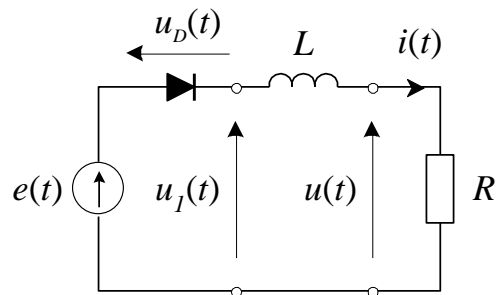
Wskazówka: woltomierze elektromagnetyczne

6. Analiza wybranych układów jednofazowych z prostownikiem półfalowym.

6.1. Układ szeregowy RL (Rys.6).

Po załączeniu napięcia $E_m \sin(\omega t)$, przy zerowym warunku początkowym $i(0-) = 0$, dioda spolaryzowana jest w kierunku przewodzenia. Równanie różniczkowe dla prądu $i(t)$ jest następujące

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = E_m \sin(\omega t) \quad (18)$$



Rys.6

Rozwiązanie równania (18) ma postać

$$i(t) = \frac{E_m}{Z} \left[e^{-\frac{R}{L}t} \sin \varphi + \sin(\omega t - \varphi) \right] \quad (19)$$

gdzie :

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \quad \text{tg } \varphi = \frac{\omega L}{R}; \quad (20)$$

Zależność (19) obowiązuje do chwili, gdy prąd osiągnie wartość zerową. Po tym czasie dioda zostaje spolaryzowana w kierunku zaporowym ($u_D < 0$). Prąd w obwodzie nie płynie do czasu $t = T$, po którym następuje odblokowanie diody i cały cykl powtarza się ponownie. Można zatem stwierdzić, że wzór (19) obowiązuje także w stanie ustalonym w przedziałach przewodzenia diody.

Przepiszmy wzór (19) podstawiając $\omega t = \lambda$

$$i(\lambda) = \frac{E_m}{Z} \left[e^{-\lambda \text{ctg } \varphi} \sin \varphi + \sin(\lambda - \varphi) \right] \quad (21)$$

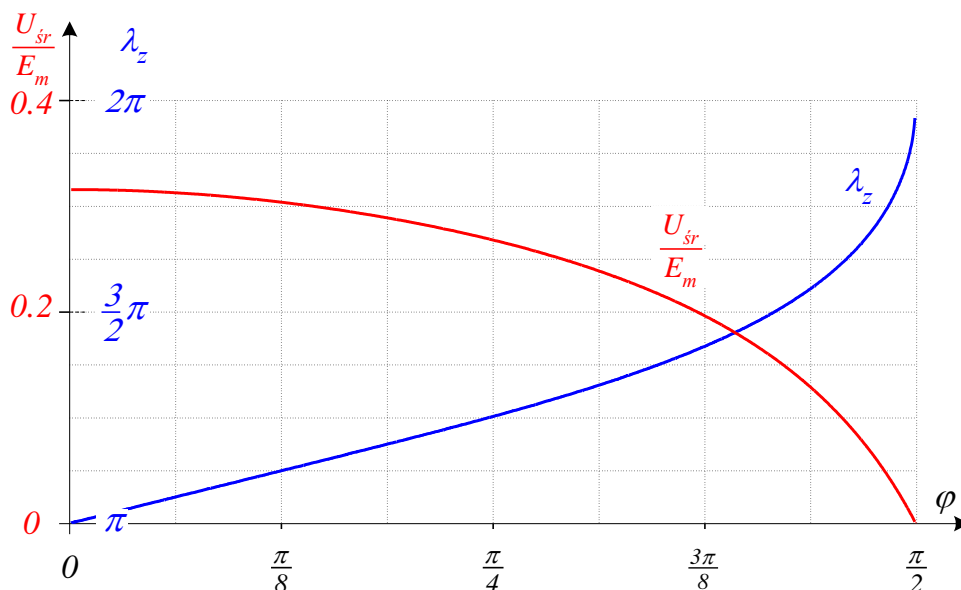
Wartość $\lambda = \lambda_z$, przy której następuje zablokowanie diody spełnia równanie

$$i(\lambda_z) = 0$$

stąd

$$e^{-\lambda_z \text{ctg } \varphi} = -\frac{\sin(\lambda_z - \varphi)}{\sin \varphi} = \cos \lambda_z - \text{ctg } \varphi \cdot \sin \lambda_z \quad (22)$$

Wykres zależności λ_z od φ (dla pierwszego okresu napięcia) przedstawiony jest na Rys.7.



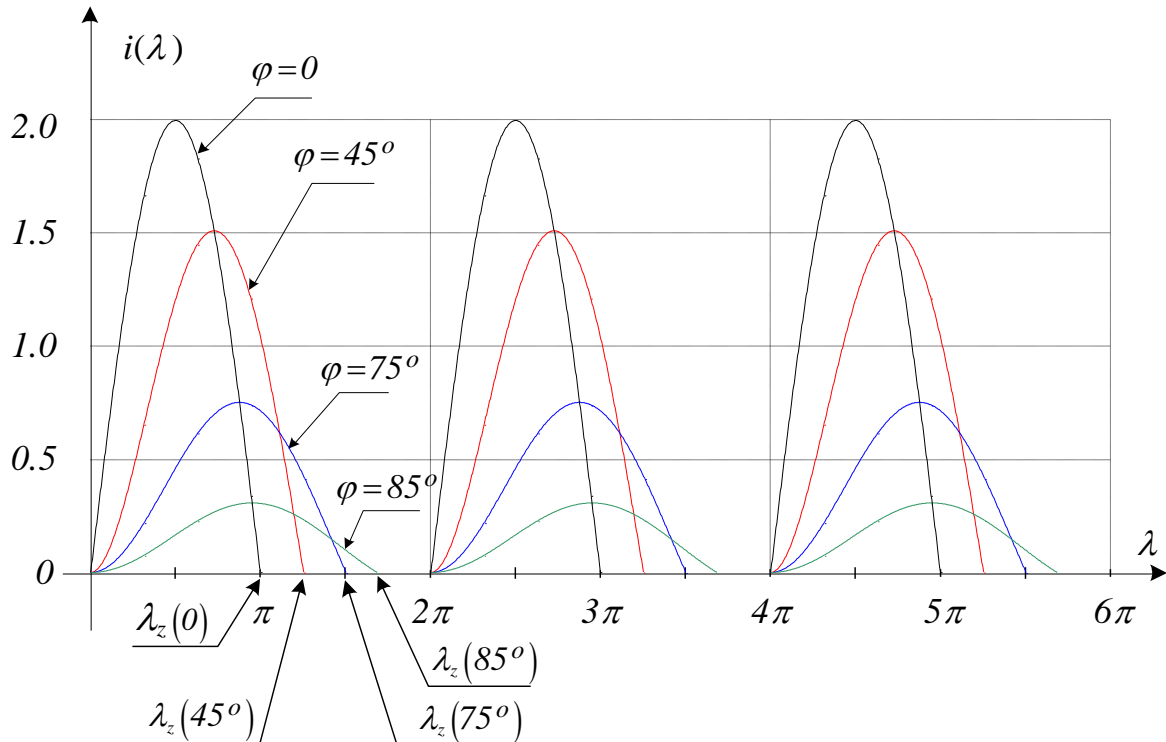
Rys.7

Na podstawie przedstawionej graficznie zależności czasu zablokowania diody od kąta fazowego odbiornika $\lambda_z(\varphi)$ można zauważyć, że dla $\varphi < \frac{\pi}{4}$

$$\lambda_z(\varphi) \cong \pi + \varphi \quad (23)$$

W stanie ustalonym wartości te są odpowiednio przesunięte - $\lambda_{zk}(\varphi) = \lambda_z(\varphi) + 2k\pi$.

Na Rys.8 przedstawiono przebiegi prądu dla $\varphi = 0^\circ, 45^\circ, 75^\circ, 85^\circ$ dla $R = 10 \Omega$ i $E_m = 20 V$



Rys.8

Wartość średnią prądu $i(t)$ wyznaczamy wykorzystując (21) oraz (22)

$$I_{sr} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} i(\lambda) d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\lambda_z} \frac{E_m}{Z} [e^{-\lambda \operatorname{ctg} \varphi} \sin \varphi + \sin(\lambda - \varphi)] d\lambda = \frac{E_m}{2\pi R} [1 - \cos \lambda_z] \quad (24)$$

$$U_{sr} = \frac{E_m}{2\pi} [1 - \cos \lambda_z] \quad (25)$$

Uwzględniając (23) dla $\varphi < \frac{\pi}{4}$ można stosować wzory

$$I_{sr} = \frac{E_m}{2\pi R} [1 + \cos \varphi] \quad (26)$$

$$U_{sr} = \frac{E_m}{2\pi} [1 + \cos \varphi] \quad (27)$$

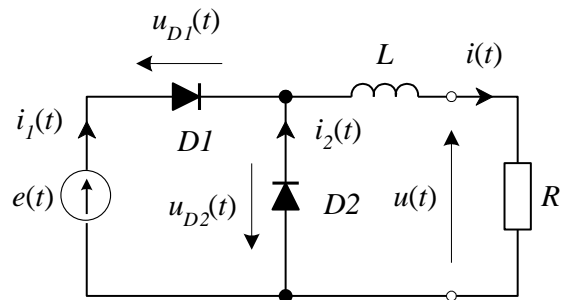
6.2. Układ szeregowy RL z diodą zerową (Rys.9).

Analizę stanu przejściowego rozpoczynamy od czasu $t = 0$ zakładając, że prąd $i(0-) = 0$.

Po załączeniu napięcia $e(t) = E_m \sin(\omega t)$ dioda $D1$ spolaryzowana jest w kierunku przewodzenia ($u_{D1} > 0$) a $D2$ w kierunku zaporowym ($u_{D2} < 0$).

Równanie opisujące przebieg prądu ma postać analogiczną, jak poprzednio (18) tzn.

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = E_m \sin(\omega t) \quad (28)$$



Rys.9

Rozwiązaniem równania (28) jest funkcja,

$$i(t) = \frac{E_m}{Z} \left[e^{-\frac{R}{L}t} \sin \varphi + \sin(\omega t - \varphi) \right] \quad (29)$$

która obowiązuje podczas, gdy napięcie na diodzie $D2$ jest ujemne, tzn. dla $0 < \omega t < \pi$.

W czasie $t_1 = \frac{T}{2}$ dioda $D2$ zostaje "odblokowana", co powoduje równocześnie wsteczną polaryzację tj. zablokowanie diody $D1$. Prąd $i(t)$ spełnia wówczas równanie jednorodne

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = 0 \quad (30)$$

z warunkiem początkowym w czasie $t_1 = \frac{T}{2} +$

$$i\left(\frac{T}{2} +\right) = i\left(\frac{T}{2} -\right) = \frac{E_m}{Z} \left[1 + e^{-\pi \operatorname{ctg} \varphi} \right] \sin \varphi \quad (31)$$

Rozwiązując równanie (30) ($t > \frac{T}{2}$) otrzymujemy

$$i(t) = i\left(\frac{T}{2} +\right) e^{-\frac{R}{L}(t-\frac{T}{2})} = \frac{E_m}{Z} \left[1 + e^{-\pi \operatorname{ctg} \varphi} \right] e^{-\frac{R}{L}(t-\frac{T}{2})} \sin \varphi \quad (32)$$

Stan przewodzenia diody $D2$ trwa do czasu $t_2 = T$, po którym dioda $D1$ zostaje odblokowana. Prąd $i(t)$ spełnia równanie (30), przy warunku początkowym dla $t = T$

$$i(T+) = i(T-) = i\left(\frac{T}{2} +\right) e^{-\pi \operatorname{ctg} \varphi} = \frac{E_m}{Z} \left[1 + e^{-\pi \operatorname{ctg} \varphi} \right] e^{-\pi \operatorname{ctg} \varphi} \sin \varphi \quad (33)$$

Zależność opisująca przebieg prądu dla $t > t_2 = T$ (do czasu ponownego zablokowania diody $D1$ tj. do $t_3 = 3\frac{T}{2}$) przyjmuje postać

$$\begin{aligned} i(t) &= \left[\frac{E_m}{Z} \sin \varphi + i(T+) \right] e^{-\frac{R}{L}(t-T)} + \frac{E_m}{Z} \sin(\omega t - \varphi) = \\ &= i(T+) e^{-\frac{R}{L}(t-T)} + \frac{E_m}{Z} \left[\sin(\omega t - \varphi) + e^{-\frac{R}{L}(t-T)} \sin \varphi \right] \end{aligned} \quad (34)$$

Stąd warunek początkowy dla następnego przedziału (dioda $D1$ zablokowana) wynosi

$$i\left(3\frac{T}{2} +\right) = i\left(3\frac{T}{2} -\right) = i(T+) e^{-\pi \operatorname{ctg} \varphi} + \frac{E_m}{2R} \left[1 + e^{-\pi \operatorname{ctg} \varphi} \right] \sin 2\varphi \quad (35)$$

Postępując analogicznie możemy wyznaczyć przebiegi prądu w kolejnych przedziałach czasowych, określonych odpowiednio stanem przewodzenia diody $D1$ lub $D2$.

Oznaczając:

$$\begin{aligned} t_{2k} &= 2k \frac{T}{2} && \text{- początkowe czasy przedziałów przewodzenia diody } D1; \\ t_{2k+1} &= (2k+1) \frac{T}{2} && \text{- początkowe czasy przedziałów przewodzenia diody } D2 \end{aligned}$$

oraz uwzględniając zależności (32) i (34) można napisać

$$\begin{cases} i(t) = i(t_{2k-1}) \cdot e^{-\frac{R}{L}(t-t_{2k-1})} & t_{2k-1} < t < t_{2k} \\ i(t) = i(t_{2k}) e^{-\frac{R}{L}(t-t_{2k})} + \frac{E_m}{Z} \left[\sin(\omega(t-t_{2k}) - \varphi) + e^{-\frac{R}{L}(t-t_{2k})} \sin \varphi \right] & t_{2k} < t < t_{2k+1} \end{cases} \quad (36)$$

Wartości prądów w czasach przełączania spełniają więc rekurencyjny układ równań,

$$\begin{cases} i(t_{2k}) = i(t_{2k-1}) e^{-\pi \operatorname{ctg} \varphi} \\ i(t_{2k+1}) = i(t_{2k}) e^{-\pi \operatorname{ctg} \varphi} + \frac{E_m}{2R} \left[1 + e^{-\pi \operatorname{ctg} \varphi} \right] \sin 2\varphi \end{cases} \quad (37)$$

którego rozwiązanie ma postać

$$\begin{aligned} i(t_{2k}) &= \frac{E_m}{2R} \frac{e^{-\pi \operatorname{ctg} \varphi} \sin 2\varphi}{1 - e^{-\pi \operatorname{ctg} \varphi}} \left(1 - e^{-2k\pi \operatorname{ctg} \varphi} \right) \\ i(t_{2k+1}) &= \frac{E_m}{2R} \frac{\sin 2\varphi}{1 - e^{-\pi \operatorname{ctg} \varphi}} \left(1 - e^{-2(k+1)\pi \operatorname{ctg} \varphi} \right) \end{aligned} \quad (38)$$

W stanie ustalonym ($t \rightarrow \infty$) prąd $i(t)$ posiada przebieg okresowy $i_u(t)$, czyli

$$\begin{cases} i_u(t_{2k}) = i_u(t_{2k+2}) = i_a \\ i_u(t_{2k-1}) = i_u(t_{2k+1}) = i_b \end{cases} \quad (39)$$

Uwzględniając, że $\lim_{k \rightarrow \infty} e^{-2k\pi \operatorname{ctg} \varphi} = 0$, otrzymujemy¹⁾

$$\begin{aligned} i_a &= \frac{E_m}{2R} \frac{e^{-\pi \operatorname{ctg} \varphi}}{1 - e^{-\pi \operatorname{ctg} \varphi}} \sin 2\varphi \\ i_b &= \frac{E_m}{2R} \frac{1}{1 - e^{-\pi \operatorname{ctg} \varphi}} \sin 2\varphi \end{aligned} \quad (40)$$

¹⁾ Wartości te można otrzymać rozwiązując układ równań:
$$\begin{cases} i_a = i_b \cdot e^{-\pi \operatorname{ctg} \varphi} \\ i_b = i_a e^{-\pi \operatorname{ctg} \varphi} + \frac{E_m}{2R} \left[1 + e^{-\pi \operatorname{ctg} \varphi} \right] \sin 2\varphi \end{cases} \quad (43)$$

Zależności opisujące przebieg prądu w poszczególnych przedziałach czasowych przyjmują zatem postać

dla $2k\pi \leq \omega t < (2k+1)\pi$ (przewodzi dioda D1);

$$i_u(t) = \frac{E_m}{2R} \frac{I}{1 - e^{-\pi \operatorname{ctg} \varphi}} \cdot e^{-\frac{R}{L}(t-kT)} \sin 2\varphi + \frac{E_m}{R} \cos \varphi \cdot \sin(\omega t - \varphi) \quad (41)$$

dla $(2k+1)\pi \leq \omega t < 2(k+1)\pi$ (przewodzi dioda D2);

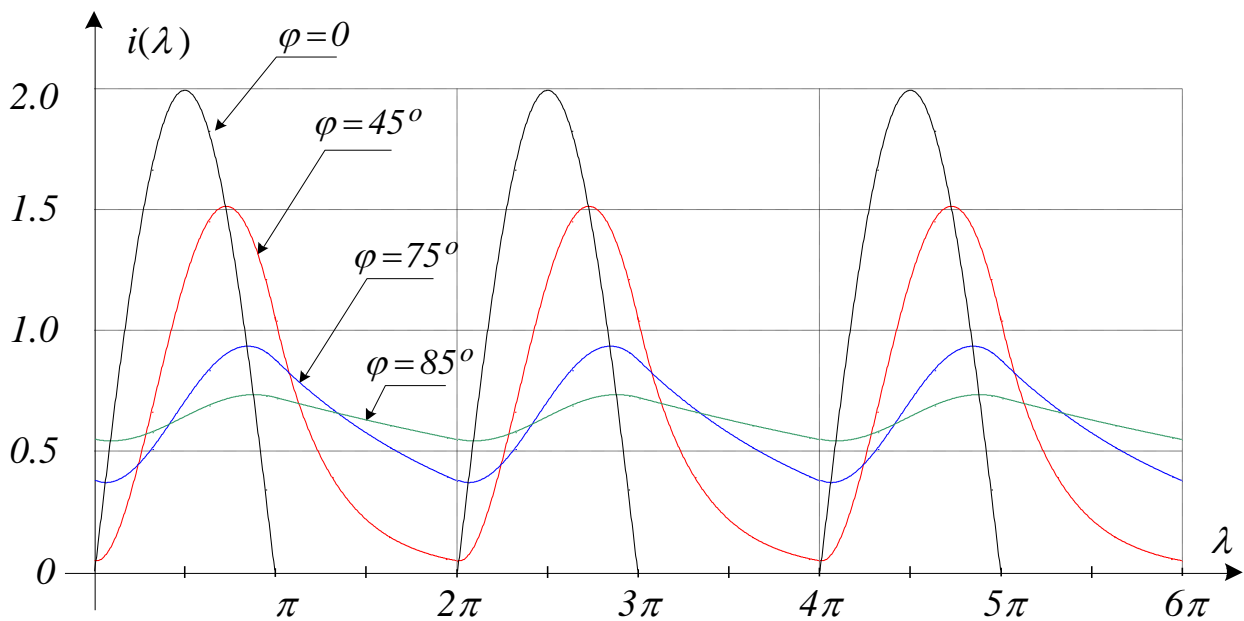
$$i_u(t) = \frac{E_m}{2R} \frac{I}{1 - e^{-\pi \operatorname{ctg} \varphi}} \cdot e^{-\frac{R}{L}(t-(2k+1)\frac{T}{2})} \sin 2\varphi \quad (42)$$

Wartość średnia prądu w analizowanym układzie wynosi

$$I_{sr} = \frac{E_m}{\pi R} \quad \text{stąd} \quad U_{sr} = \frac{E_m}{\pi} = \frac{\sqrt{2}E}{\pi} \approx 0.45E \quad (44)$$

Można zauważyć (40), że gdy $\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}$ to $i_b - i_a \rightarrow 0$ (przebieg prądu będzie bezpulsowy).

Na Rys.10 przedstawiono przebiegi prądu dla $\varphi = 0^\circ, 45^\circ, 75^\circ, 85^\circ$ przy $R = 10 \Omega$ i $E_m = 20 \text{ V}$



Rys. 10

W rozpatrywanym przykładzie

$$I_{sr} = \frac{20}{10\pi} \approx 0.637 \text{ A}$$

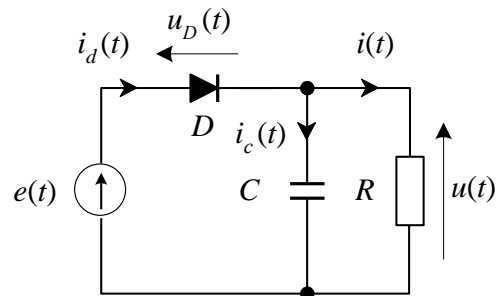
6.3. Układ równoległy RC (Rys. 11)

Najczęściej stosowanym sposobem wygładzania przebiegu napięcia wyprostowanego jest włączenie równolegle do odbiornika kondensatora o odpowiednio dużej pojemności (Rys.11).

Po załączeniu napięcia $e(t) = E_m \sin(\omega t)$ dioda zostaje spolaryzowana w kierunku przewodzenia $u_D(t) > 0$.

W tym stanie pracy napięcie na kondensatorze wynosi

$$u(t) = e(t) = E_m \sin(\omega t) \quad (45)$$



Rys.11

Po osiągnięciu wartości maksymalnej s.em. $e(t)$ maleje, równocześnie kondensator zaczyna rozładowywać się przez rezystor - $i_c(t) < 0$. Stan ten trwa do chwili, gdy prąd płynący przez diodę $i_d(t)$ będzie równy zero. Oznaczając czas zablokowania diody przez t_z otrzymujemy następujące warunki

$$i(t_z -) + i_c(t_z -) = 0 \quad \text{czyli} \quad C \frac{du}{dt}(t_z -) = -\frac{u(t_z -)}{R} \quad (46)$$

Szybkość zmian napięcia na kondensatorze ograniczona jest stałą czasową obwodu RC i począwszy od czasu t_z jest ona mniejsza od szybkości zmian (zmniejszania się) s.em. $e(t)$. Powoduje to, że napięcie źródła będzie mniejsze od $u(t)$ i dioda zostanie spolaryzowana w kierunku zaporowym - $u_D(t) < 0$.

Uwzględniając, że

$$\begin{aligned} i_c(t_z -) &= C \frac{du}{dt}(t_z -) = \omega C E_m \cos(\omega t_z) \\ i(t_z -) &= \frac{u(t_z -)}{R} = \frac{E_m}{R} \sin(\omega t_z) \end{aligned} \quad (47)$$

otrzymujemy

$$\omega C E_m \cos(\omega t_z) = -\frac{E_m}{R} \sin(\omega t_z) \quad \text{stąd: } \mathbf{tg} \omega t_z = -\omega RC \quad (48)$$

Przewidując, że $\omega t_z > \frac{\pi}{2}$, zależność określająca czas zablokowania diody przyjmuje postać

$$\omega t_z = \frac{\pi}{2} + \mathbf{arc} \mathbf{tg} \frac{1}{\omega RC} \quad (49)$$

Po czasie t_z napięcie $u(t)$ spełnia równanie jednorodne

$$RC \frac{du(t)}{dt} + u(t) = 0 \quad (50)$$

z warunkiem początkowym

$$u(t_z +) = u(t_z -) = E_m \sin(\omega t_z) = E_m \frac{R\omega C}{\sqrt{1 + (R\omega C)^2}} \quad (51)$$

Przebieg napięcia dla $t > t_z$ jest zatem następujący

$$u(t) = E_m \frac{R\omega C}{\sqrt{1 + (R\omega C)^2}} e^{-\frac{t-t_z}{RC}} \quad (52)$$

Stan rozładowywania kondensatora określony jest warunkiem $u(t) < e(t)$ i kończy się wtedy, gdy wielkości te będą równe, tzn.

$$\frac{R\omega C}{\sqrt{1+(R\omega C)^2}} e^{-\frac{t_0+T-t_z}{RC}} = \sin(\omega(t_0 + T)) \quad (53)$$

gdzie: $t_0 + T$ czas ponownego odblokowania diody.

Od tej chwili przebieg napięcia $u(t)$ jest już przebiegiem ustalonym - okresowym. Następny stan przewodzenia diody trwa do czasu $t_z + T$, po którym dioda ponownie zostaje zablokowana, aż do czasu $t_0 + 2T$. Następnie cały proces powtarza się okresowo.

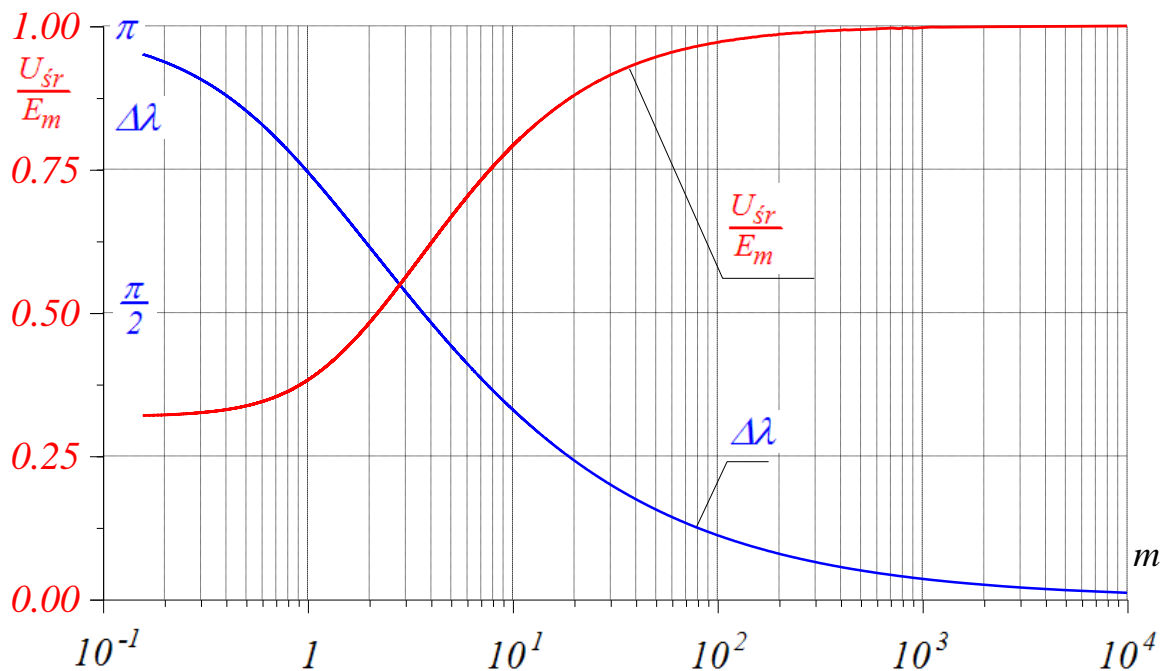
Oznaczając $\omega t = \lambda$, $\omega t_0 = \lambda_0$, $\omega t_z = \lambda_z$, $\Delta\lambda = \lambda_z - \lambda_0$, $m = R\omega C$ oraz uwzględniając okresowość napięcia w stanie ustalonym, przebieg $u(t)$ w jednym okresie można przedstawić za pomocą następujących zależności:

$$\begin{aligned} u(\lambda) &= E_m \sin(\lambda) && \text{dla } 2k\pi + \lambda_0 \leq \lambda < 2k\pi + \lambda_z \\ u(\lambda) &= E_m \frac{m}{\sqrt{1+m^2}} e^{-\frac{\lambda - (\lambda_z + 2k\pi)}{m}} && \text{dla } 2k\pi + \lambda_z \leq \lambda < 2(k+1)\pi + \lambda_0 \end{aligned} \quad (54)$$

Równanie (53) można zapisać teraz w prostej postaci,

$$\sin \Delta\lambda + m \cos \Delta\lambda = m \cdot e^{-\frac{2\pi - \Delta\lambda}{m}} \quad (55)$$

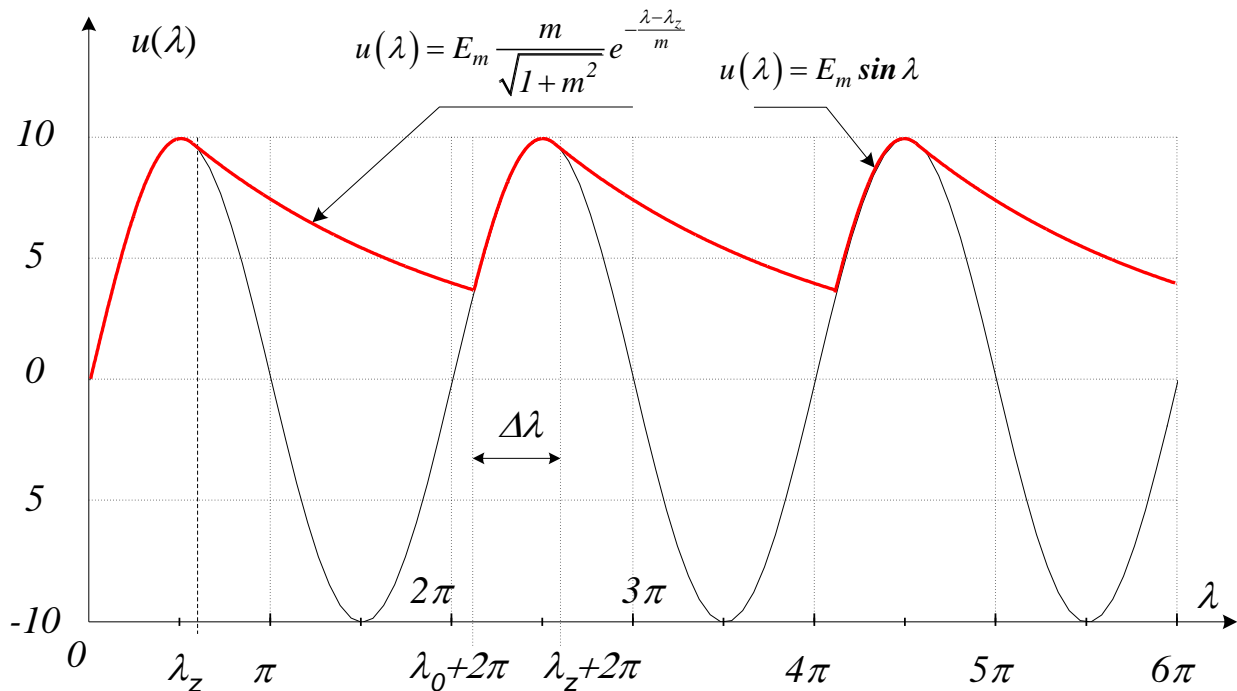
Przybliżone rozwiązanie $\Delta\lambda = \Delta\lambda(m)$ równania (55) przedstawione jest na Rys. 12



Rys.12

Wartość średnia przebiegu $u(t)$ w stanie ustalonym wynosi:

$$U_{sr} = \frac{1}{2\pi} \int_{\lambda_0}^{\lambda_0+2\pi} u(\lambda) d\lambda = \frac{E_m}{2\pi} [1 - \cos(\Delta\lambda)] \sqrt{1+m^2} \quad (56)$$

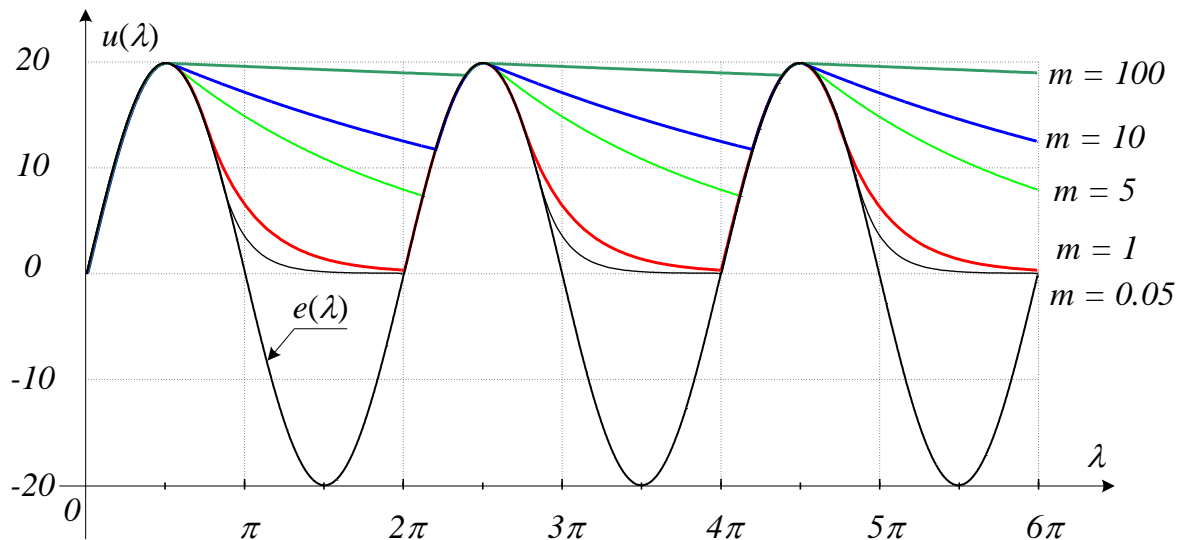


Rys. 13

Na Rys.14 przedstawiono przykładowe przebiegi napięcia na odbiorniku, dla różnych wartości parametru 'm'. Sposób postępowania przy ich wyznaczaniu jest następujący:

1. Dla danego m wyznaczamy $\lambda_z = \omega t_z = \frac{\pi}{2} + \text{arctg } \frac{1}{m}$;
2. Na podstawie Rys.12 określamy $\Delta\lambda$; (można również rozwiązać równanie (55))
3. Obliczamy $\lambda_0 = \lambda_z - \Delta\lambda$;

$$4. u(\lambda) = \begin{cases} E_m \frac{m}{\sqrt{1+m^2}} e^{\frac{\lambda-\lambda_z}{m}} & \text{dla } \lambda_z + 2k\pi < \lambda \leq \lambda_0 + 2(k+1)\pi \\ E_m \sin \lambda & \text{dla } \lambda_0 + 2k\pi < \lambda \leq \lambda_z + 2k\pi \end{cases}$$



Rys. 14

Laboratorium Elektrotechniki Teoretycznej
Teoria Obwodów 2
ELR021303L

Temat ćwiczenia:

**Przebiegi niesinusoidalne
- Szeregi Fouriera**

Instytut Podstaw Elektrotechniki i Elektrotechnologii -



Zakład Elektrotechniki Teoretycznej



1. Cel i zakres ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest przeprowadzenie analizy fourierowskiej sygnałów okresowych przy wykorzystaniu programu MATLAB. Zakres ćwiczenia obejmuje obliczanie współczynników Fouriera różnych sygnałów okresowych, badanie widma amplitudowego i fazowego sygnału oraz aproksymowanie sygnałów wielomianem trygonometrycznym.

2. Wstęp teoretyczny

Sygnał $x(t)$ nazywamy okresowym jeżeli istnieje liczba T , dla której dla dowolnego t

$$x(t) = x(t + kT) \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1)$$

Okresem sygnału nazywamy najmniejszą wartość T spełniającą równanie (1).

Podstawową metodą analizy sygnałów okresowych jest tzw. analiza fourierowska polegająca na przedstawieniu sygnału za pomocą tzw. szeregu Fouriera, którego postać wykładnicza jest następująca

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{c}_k e^{jk\omega_0 t} \quad (2)$$

gdzie : \underline{c}_k - współczynniki wykładniczego szeregu Fouriera

$$\underline{c}_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad \text{gdzie : } \omega_0 = \frac{2\pi}{T} ; T - \text{okres sygnału} \quad (3)$$

Współczynniki wykładniczego szeregu Fouriera określają tzw. dyskretne widmo zespolone funkcji okresowej

$$\underline{c}_k = |\underline{c}_k| e^{j\varphi_k} \quad -\infty < k < \infty \quad (4)$$

zawierające dyskretne widmo amplitudowe $|\underline{c}_k|$ oraz dyskretne widmo fazowe φ_k .

W przypadku sygnałów rzeczywistych

$$\underline{c}_{-k} = \underline{c}_k^* \quad (5)$$

Wynika stąd, że widmo amplitudowe jest parzystą funkcją k natomiast widmo fazowe jest funkcją nieparzystą

$$|\underline{c}_{-k}| = |\underline{c}_k|, \quad \varphi_{-k} = -\varphi_k \quad (6)$$

Zapisując współczynniki \underline{c}_k w postaci

$$\underline{c}_k = \frac{1}{2} [a_k - jb_k] = \frac{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}}{2} e^{j\varphi_k}, \quad \text{tg } \varphi_k = -\frac{b_k}{a_k} \quad (7)$$

można sygnał $x(t)$ przedstawić za pomocą szeregu trygonometrycznego,

$$x(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t\} \quad (8)$$

którego współczynniki określone są następującymi zależnościami

$$a_k = 2 \operatorname{Re} \underline{c}_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos k\omega_0 t dt, \quad b_k = -2 \operatorname{Im} \underline{c}_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin k\omega_0 t dt \quad (9)$$

Szereg trygonometryczny można zapisać także w innej - równoważnej postaci

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} X_{k_{sk}} \sin(k\omega_0 t + \psi_k) \quad (10)$$

gdzie: $X_{k_{sk}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = \sqrt{2} |c_k|$ - wartość skuteczna k -tej harmonicznej; $\tan \psi_k = \frac{a_k}{b_k}$; (11)

Wartości współczynników szeregów zależą oczywiście od przebiegu sygnału. Jednakże istnieją pewne wspólne właściwości sygnałów przy spełnieniu, których szereg Fouriera będzie posiadał szczególną postać. Wymienić tu należy wspomnianą wcześniej rzeczywistość sygnału prowadząca do warunku (5). Oprócz tego ważnymi cechami, mającymi wpływ na właściwości szeregów są parzystość i nieparzystość sygnału oraz tzw. antysymetria.

Każdą funkcję można przedstawić w postaci sumy części parzystej i nieparzystej stosując zapis

$$x(t) = x_p(t) + x_{np}(t) = \frac{1}{2} [x(t) + x(-t)] + \frac{1}{2} [x(t) - x(-t)] \quad (12)$$

Stąd uwzględniając szereg w postaci (8) możemy stwierdzić, że:

Gdy: $x(-t) = x(t)$, czyli $x(t) = x_p(t)$, stąd

$$b_k = 0 \quad (13)$$

A zatem
$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega t) \quad (14)$$

Gdy: $x(-t) = -x(t)$, czyli $x(t) = x_{np}(t)$, stąd

$$a_k = 0 \quad (15)$$

czyli
$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega t) \quad (16)$$

Sygnał nazywamy antysymetryczny jeżeli: $x(t \pm \frac{T}{2}) = -x(t)$.

Uwzględniając powyższe określenie w (2) możemy napisać:

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega(t+\frac{T}{2})} &= - \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega t} \Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j(k\omega t + k\pi)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-c_k) e^{jk\omega t} \Rightarrow \\ & \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (-1)^k e^{jk\omega t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-c_k) e^{jk\omega t} \end{aligned}$$

Stąd

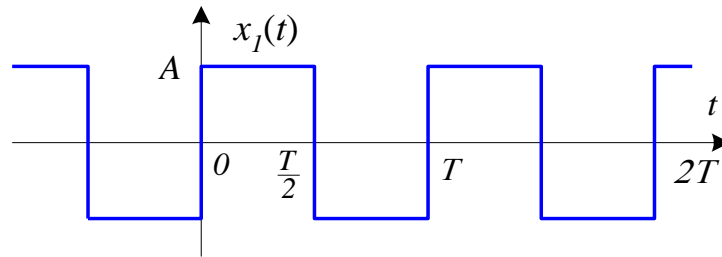
$$(-1)^k c_k = -c_k \Rightarrow c_{2n} = 0 \quad n=0, \pm 1, \dots \quad (17)$$

Czyli

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{2n+1} e^{j(2n+1)\omega t} = \sum_{n=0}^{\infty} \{ a_{2n+1} \cos(2n+1)\omega t + b_{2n+1} \sin(2n+1)\omega t \} \quad (18)$$

3. Przykłady rozwinięć sygnałów okresowych w szereg Fouriera.

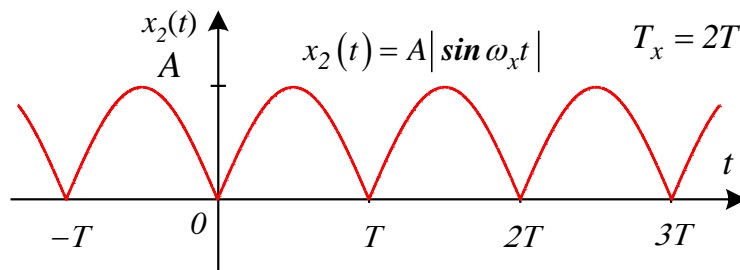
3.1. Sygnał "prostokątny" - (nieparzysty - antysymetryczny).



Rys. 1

$$x(t) = \frac{4A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin[(2n-1)\omega_0 t]}{2n-1} = \frac{4A}{\pi} \left(\sin(\omega_0 t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega_0 t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega_0 t) + \dots \right) \quad (19)$$

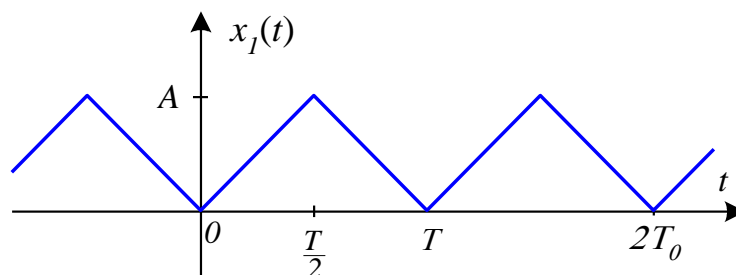
3.2. Sinusoida "wyprostowana" dwufalowo - (parzysty)



Rys. 2

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{2A}{\pi} - \frac{4A}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} \cos[2k\omega_x t] = \frac{2A}{\pi} - \frac{4A}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} \cos(2k\omega_x t) = \\ &= \frac{2A}{\pi} - \frac{4A}{\pi} \left(\frac{1}{1 \cdot 3} \cos(2\omega_x t) + \frac{1}{3 \cdot 5} \cos(4\omega_x t) + \frac{1}{5 \cdot 7} \cos(6\omega_x t) + \dots \right) \end{aligned} \quad (20)$$

3.3. Sygnał trójkątny " - (parzysty - antysymetryczny w części zmiennej)



$$\begin{aligned} x_b(t) &= \frac{A}{2} - \frac{4A}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos[(2n-1)\omega_0 t] = \\ &= \frac{A}{2} - \frac{4A}{\pi^2} \left[\cos(\omega_0 t) + \frac{1}{9} \cos(3\omega_0 t) + \frac{1}{25} \cos(5\omega_0 t) + \dots \right] \end{aligned} \quad (21)$$

4. Opis ćwiczenia

4.1. Obliczanie współczynników szeregu trygonometrycznego Fouriera przebiegów okresowych.

Sygnały okresowe badane w ćwiczeniu są zdefiniowane w programie MATLAB poprzez tzw. pliki funkcyjne (ang. *function file*). Pliki funkcyjne rozpoczynają się od słowa kluczowego **function**. Muszą zawierać nazwę funkcji i nawiasy okrągłe obejmujące listę argumentów wejściowych. Nazwa funkcji musi być taka sama jak nazwa pliku (bez rozszerzenia) w którym tą funkcję zapisano. Pierwsza linia pliku funkcyjnego powinna być zapisana następująco:

```
function [lista argumentów wyjściowych]=nazwa_funkcji(lista argumentów wejściowych)
```

Wykorzystywane w ćwiczeniu pliki funkcyjne noszą nazwy **fun1 ... fun8**. Zawierają one różne funkcje okresowe, np. przebieg prostokątny, piłokształtny, sinusoidalny wyprostowany jedno- i dwufalowo itp.

Wykres funkcji można uzyskać wywołując w MATLABIE funkcję **fplot**, zgodnie z następującym przykładem:

```
>>fplot('fun1',[0 3])
```

Drugi argument funkcji **fplot** jest dwuelementowym wektorem określającym przedział w którym funkcja ma być narysowana.

Podstawowym celem ćwiczenia jest obliczanie współczynników Fouriera funkcji okresowych. Zestaw poleceń służący do tego celu jest zapisany w tzw. plikach skryptowych (ang. *script file*). Pliki te noszą nazwy **wsp_f1 ... wsp_f8**.

Poniżej podano przykładowy wydruk pliku skryptowego **wsp_f1**:

```
k=0;
a0=quadl('fun1c',0,1)
for k=1:20
b(k)=quadl('fun1s',0,1);
a(k)=quadl('fun1c',0,1);
end
wsp_szer=[a' b']
```

gdzie: a_0 , $a(k)$, $b(k)$ oznaczają współczynniki szeregu fouriera zgodnie z wzorem (6). Są one obliczane wg wzoru (7), przy użyciu funkcji **quadl**. Funkcja **quadl** służy do obliczania całki oznaczonej w oparciu o rekursywną adaptacyjną metodę Newtona-Cotesa. Postać wywołania funkcji jest następująca:

```
>>Q=quadl('fname',A,B)
```

gdzie: **fname** – nazwa pliku funkcyjnego; **A**, **B** – granice całkowania

Plik funkcyjny **fun1s.m** zawiera funkcję postaci: $\text{fun1s}(t) = 2/T * \text{fun1}(t) * \sin(k\omega t)$, natomiast plik funkcyjny **fun1c.m** zawiera funkcję: $\text{fun1c}(t) = 2/T * \text{fun1}(t) * \cos(k\omega t)$,

gdzie: **fun1(t)** jest funkcją okresową zdefiniowaną w pliku **fun1.m**

Po wywołaniu pliku **wsp_f1** następuje obliczenie składowej stałej a_0 oraz 20 początkowych współczynników Fouriera funkcji okresowej **fun1(t)**, czyli amplitud 20 harmonicznnych. Liczbę tą można zmienić (instrukcja `for k=1:20`). Tak samo oblicza się oczywiście współczynniki pozostałych funkcji okresowych.

4.2. Aproksymacja sygnału okresowego wielomianem trygonometrycznym.

Zagadnienie aproksymacji sygnału wielomianem trygonometrycznym można zilustrować wykresami funkcji **wielomian(t)** zapisanej w pliku funkcyjnym **wielomian.m**:

```
function y=wielomian(t);  
global a b a0 n  
T=1;  
w=2*pi/T;  
y=a0/2;  
for k=1:n  
    y=y+b(k)*sin(k*w*t)+a(k)*cos(k*w*t);  
end
```

Polecenie **global a b a0 n** powoduje, że wartości zmiennych $a(k)$, $b(k)$, $a0$ – czyli obliczone wcześniej wartości współczynników szeregu Fouriera – są widziane zarówno w przestrzeni roboczej, jak i wewnątrz wywoływanej funkcji **wielomian**. Wartość n jest zadawaną w przestrzeni roboczej liczbą składników w skończonym szeregu Fouriera ($n \leq 20$). Tak więc wartość funkcji **wielomian(t)**, dla danego n , jest sumą skończonego szeregu Fouriera o współczynnikach $a(k)$, $b(k)$, $a0$, zawierającego n składników:

$$\mathbf{wielomian}(t) = \frac{1}{2} a0 + \sum_{k=1}^n \{ a(k) \cos(k\omega t) + b(k) \sin(k\omega t) \} \quad (22)$$

Wykres funkcji **wielomian(t)** można uzyskać wywołując funkcję **fplot**, np:

```
>>fplot('wielomian',[0 3])
```


5. Program ćwiczenia

5.1.

Sporządzić wykres funkcji okresowej (np. **fun1**) używając polecenia **fplot**. Na podstawie wykresu określić typ sygnału opisanego daną funkcją (np. czy jest to przebieg prostokątny, trójkątny, sinusoidalny wyprostowany, czy posiada składową stałą). Podać wartość okresu T . Określić rodzaj symetrii sygnału, jeśli sygnał spełnia warunki symetrii. Podstawowe rodzaje symetrii sygnałów okresowych to:

- symetria względem osi rzędnych (funkcja parzysta),
- symetria względem początku układu współrzędnych (funkcja nieparzysta),
- symetria względem osi odciętych (funkcja antysymetryczna).

5.2.

1. Obliczyć współczynniki szeregu Fouriera danej funkcji używając odpowiedniego pliku skryptowego (np. dla funkcji **fun1** należy użyć polecenia **wsp_f1** itd.) Na monitorze zostanie wyświetlona wartość a_0 oraz dwukolumnowa macierz zawierająca w pierwszej kolumnie kolejne współczynniki $a(k)$, w drugiej kolumnie współczynniki $b(k)$, $k = 1, \dots, 20$.

Wpisać współczynniki do **tabeli 1**, zaokrąglając ich wartość do 2 miejsca po przecinku.

2. Określić, jaka jest postać szeregu Fouriera, tzn. które harmoniczne występują w rozwinięciu funkcji w szereg, czy występują wyrazy z sinusami i cosinusami. Znaleźć związek między postacią szeregu Fouriera a rodzajem symetrii sygnału.

3. Obliczyć wartości $c(k)$ oraz $\varphi(k)$ zgodnie ze wzorem (7), wpisać do **tabeli 1**, sporządzić wykres widma amplitudowego i fazowego badanej funkcji okresowej.

Tabela 1

Nr harmonicznej	$a(k)$	$b(k)$	$c(k)$	$\varphi(k)$
0	a_0	–	–	–
1	$a(1)$	$b(1)$	$c(1)$	$\varphi(1)$
2				
...				
20				

5.3.

Wykorzystując funkcję **wielomian** wykonać aproksymację funkcji okresowej wielomianem trygonometrycznym dla różnej liczby składników szeregu Fouriera n . Ocenic szybkość zbieżności szeregu Fouriera różnych funkcji, zwrócić uwagę na występowanie oscylacji wokół punktów nieciągłości sygnału i ich zależność od n (efekt Gibbsa).

6. Pytania kontrolne

- Podać wzory na obliczenie składowej stałej a_0 oraz współczynników a_k i b_k szeregu Fouriera. Wyprowadzić te wzory.
- Jaka jest zależność między współczynnikami a_k i b_k szeregu trygonometrycznego a współczynnikami c_k szeregu wykładniczego ?
- Co to jest widmo amplitudowe i fazowe funkcji okresowej ?
- Wymienić i zdefiniować rodzaje symetrii sygnału. Jaki wpływ na postać szeregu Fouriera mają określone własności sygnału ?

Dodatek. Wersje źródłowe plików wykorzystywanych w ćwiczeniu.**Plik: fun1.m**

```
function y=fun1(t);
T=1;
A=1;
w=2*pi/T;
y=A*sign(sin(w*t));
```

Plik: fun1c.m

```
function d=fun1c(t);
global k
T=1;
A=1;
w=2*pi/T;
y=A*sign(sin(w*t));
d=(2/T)*y.*cos(k*w*t);
```

Plik: fun1s.m

```
function d=fun1s(t);
global k
T=1;
A=1;
w=2*pi/T;
y=A*sign(sin(w*t));
d=(2/T)*y.*sin(k*w*t);
```

Plik: fun2.m

```
function y=fun2(t);
T=1;
A=1;
w=2*pi/T;
y=A*sign(cos(w*t));
```

Plik: fun2c.m

```
function d=fun2c(t);
global k
T=1;
A=1;
w=2*pi/T;
y=A*sign(cos(w*t));
d=(2/T)*y.*cos(k*w*t);
```

Plik: fun2s.m

```
function d=fun2s(t);
global k
T=1;
A=1;
w=2*pi/T;
y=A*sign(cos(w*t));
d=(2/T)*y.*sin(k*w*t);
```

Plik: fun3.m

```
function y=fun3(t)
T=1;
y=t-floor(t/T);
```

Plik: fun3c.m

```
function d=fun3c(t);
global k
T=1;
w=2*pi/T;
y=t-floor(t/T);
d=(2/T)*y.*cos(k*w*t);
```

Plik: fun3s.m

```
function d=fun3s(t);
global k
T=1;
w=2*pi/T;
y=t-floor(t/T);
d=(2/T)*y.*sin(k*w*t);
```

Plik: fun4.m

```
function y=fun4(t)
T=1;
y=t-floor(t/T+0.5);
```

Plik: fun4c.m

```
function d=fun4c(t)
global k
T=1;
w=2*pi/T;
y=t-floor(t/T+0.5);
d=(2/T)*y.*cos(k*w*t);
```

Plik: fun4s.m

```
function d=fun4s(t)
global k
T=1;
w=2*pi/T;
y=t-floor(t/T+0.5);
d=(2/T)*y.*sin(k*w*t);
```

Plik: fun5.m

```
function y=fun5(t)
T=2;
p=sign(sin(2*t*pi/T));
y=p.*(t-floor(2*t/T));
```

Plik: fun5c.m

```
function d=fun5c(t)
global k
T=2;
w=2*pi/T;
p=sign(sin(2*t*pi/T));
y=p.*(t-floor(2*t/T));
d=(2/T)*y.*cos(k*w*t);
```

Plik: fun5s.m

```
function d=fun5s(t)
global k
T=2;
w=2*pi/T;
p=sign(sin(2*t*pi/T));
y=p.*(t-floor(2*t/T));
d=(2/T)*y.*sin(k*w*t);
```

Plik: fun6.m

```
function y=fun6(t);
T=1;
A=1;
w=2*pi/T;
y=A*abs(sin(0.5*w*t));
```

Plik: fun6c.m

```
function d=fun6c(t);
global k
T=1;
A=1;
w=2*pi/T;
y=A*abs(sin(0.5*w*t));
d=(2/T)*y.*cos(k*w*t);
```

Plik: fun6s.m

```
function d=fun6s(t);
global k
T=1;
A=1;
w=2*pi/T;
y=A*abs(sin(0.5*w*t));
d=(2/T)*y.*sin(k*w*t);
```

Plik: fun7.m

```
function y=fun7(t);
T=1;
A=1;
w=2*pi/T;
y=A/2*(sin(w*t)+abs(sin(w*
t)));
```

Plik: fun7c.m

```
function d=fun7c(t);
global k
T=1;
A=1;
w=2*pi/T;
y=A/2*(sin(w*t)+abs(sin(w*
t)));
d=(2/T)*y.*cos(k*w*t);
```

Plik: fun7s.m

```
function d=fun7s(t);
global k
T=1;
A=1;
w=2*pi/T;
y=A/2*(sin(w*t)+abs(sin(w*
t)));
d=(2/T)*y.*sin(k*w*t);
```

Plik: fun8.m

```
function y=fun8(t);
T=1;
A=1;
w=2*pi/T;
x=A*sin(w*t);
y=x.^3;
```

Plik: fun8c.m

```
function d=fun8c(t);
global k
T=1;
A=1;
w=2*pi/T;
x=A*sin(w*t);
y=x.^3;
d=(2/T)*y.*cos(k*w*t);
```

Plik: fun8s.m

```
function d=fun8c(t);
global k
T=1;
A=1;
w=2*pi/T;
x=A*sin(w*t);
y=x.^3;
d=(2/T)*y.*sin(k*w*t);
```

Plik: start.m

```
global a b a0 n k
```

Plik: szereg_F.m

```
t=[0:0.001:2];
T=1;
w=2*pi/T;
y=a0/2;
for k=1:l
y=y+b(k)*sin(k*w*t)+a(k)*cos(k*
w*t);
end
plot(t,y)
```

Plik: wielomian.m

```
function z=wielomian(t);
global a b a0 n k
T=1;
w=2*pi/T;
z=a0/2;
for k=1:n
z=z+b(k)*sin(k*w*t)+a(k)*cos(k*
w*t);
end
```

Plik: wsp_f1.m

```
global k
k=0;
a0=quadr('fun1c',0,1);
for k=1:20
b(k)=quadr('fun1s',0,1);
a(k)=quadr('fun1c',0,1);
end
a0=round(a0*10000)/10000
wsp_szer=[a' b']
```

Plik: wsp_f4.m

```
global k
k=0;
a0=quadr('fun4c',0,1);
for k=1:20
b(k)=quadr('fun4s',0,1);
a(k)=quadr('fun4c',0,1);
end
a0=round(a0*10000)/10000
wsp_szer=[a' b']
```

Plik: wsp_f7.m

```
global k
k=0;
a0=quadr('fun7c',0,1);
for k=1:20
b(k)=quadr('fun7s',0,1);
a(k)=quadr('fun7c',0,1);
end
a0=round(a0*10000)/10000
wsp_szer=[a' b']
```

Plik: wsp_f2.m

```
global k
k=0;
a0=quadr('fun2c',0,1);
for k=1:20
b(k)=quadr('fun2s',0,1);
a(k)=quadr('fun2c',0,1);
end
a0=round(a0*10000)/10000
wsp_szer=[a' b']
```

Plik: wsp_f5.m

```
global k
k=0;
a0=quadr('fun5c',0,2);
for k=1:20
b(k)=quadr('fun5s',0,2);
a(k)=quadr('fun5c',0,2);
end
a0=round(a0*10000)/10000
wsp_szer=[a' b']
```

Plik: wsp_f8.m

```
global k
k=0;
a0=quadr('fun8c',0,1);
for k=1:20
b(k)=quadr('fun8s',0,1);
a(k)=quadr('fun8c',0,1);
end
a0=round(a0*10000)/10000
wsp_szer=[a' b']
```

Plik: wsp_f3.m

```
global k
k=0;
a0=quadr('fun3c',0,1);
for k=1:20
b(k)=quadr('fun3s',0,1);
a(k)=quadr('fun3c',0,1);
end
a0=round(a0*10000)/10000
wsp_szer=[a' b']
```

Plik: wsp_f6.m

```
global k
k=0;
a0=quadr('fun6c',0,1);
for k=1:20
b(k)=quadr('fun6s',0,1);
a(k)=quadr('fun6c',0,1);
end
a0=round(a0*10000)/10000
wsp_szer=[a' b']
```

Uwagi dotyczące ćwiczenia: